

# Transition vers la turbulence de la couche d'Ekman stratifiée

Nadia Mkhinini

## **ABSTRACT : Transition to the turbulence in stratified Ekman flow**

Although a stable stratification should suppress vertical motions and turbulence, significant turbulence is observed in nocturnal or polar atmospheric boundary layers (ABLs), and often presents a high degree of instationarity or intermittency. In this work we use the Ekman flow as a prototype flow to explore possible dynamical mechanisms generating this turbulence.

The linear instability of neutral and stratified Ekman flow has been studied theoretically and experimentally [Lilly, 1966b, Brown, 1972]. The fastest growing infinitesimal perturbations equilibrate nonlinearly in the form of longitudinal roll vortices which are close analogues of circulations found in neutral and weakly convective ABLs [Brown, 1970, Young et al., 2002]. Therefore a secondary instability mechanism must be invoked for three-dimensional (3D) turbulence to be generated. Through such a mechanism, which is known to exist in the neutral case [Dubos et al., 2008], infinitesimal 3D perturbations to the equilibrated rolls grow and eventually lead to turbulence through nonlinear interactions.

We perform the secondary stability analysis of stratified Ekman boundary layer rolls for a few values of the Reynolds, Richardson and Prandtl numbers. For this, we first compute the equilibrated rolls and discuss their structure. Especially there exists a range of intermediate Richardson numbers for which locally unstable stratification is present in the vortex core. This feature provides a potential mechanism and energy source for the secondary instability. The energetics of the growth of three-dimensional perturbations are discussed for a few representative values of the control parameters.

## **RÉSUMÉ : Transition vers la turbulence de la couche d'Ekman stratifiée**

Bien que la stratification tend à éliminer les mouvements verticaux et turbulents, on peut observer de la turbulence dans les couches limites atmosphériques (CLA) nocturnes ou polaires. Ces derniers présentent souvent un niveau assez élevé de discontinuité temporelle ou spatiale. Dans ce travail nous allons utiliser l'écoulement d'Ekman comme étant un écoulement de base afin d'observer les différents mécanismes de production de cette turbulence.

L'instabilité linéaire dans le cas de la couche d'Ekman neutre et stratifiée a été étudiée théoriquement et expérimentalement [Lilly, 1966b, Brown, 1972]. Les perturbations infinitésimales qui ont le taux de croissance le plus grand saturent sous formes de rouleaux longitudinaux semblables à ceux qui peuvent exister dans les CLA neutres et peu convectives [Brown, 1970, Young et al., 2002]. L'étude d'une instabilité linéaire secondaire suite à des perturbations infinitésimales tridimensionnelles (3D) doit être donc évoquée pour compléter les études précédentes. Le cas neutre a été déjà fait [Dubos et al., 2008], l'ajout de la perturbation 3D aux rouleaux saturés peu mener à des éventuelles turbulences par des interactions non linéaires.

Nous avons étudié l'instabilité linéaire secondaire dans le cas de la couche d'Ekman stratifiée pour différentes valeurs des nombres de Reynolds, Richardson et Prandtl. Nous avons alors commencé par regarder les rouleaux saturés et observer leurs structures. A ces rouleaux nous avons ajouté une perturbation infinitésimale 3D et nous avons étudié son évolution et son influence sur l'écoulement en se référant à une étude énergétique.

# Remerciements :

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à M. Thomas Dubos d'avoir accepté, d'aussi bonne grâce, d'encadrer ce présent stage, mais aussi pour la qualité de son encadrement et son soutien tout au long du déroulement de ce stage. Je le remercie également d'avoir accepté de profiter de ses immenses expériences dans les domaines de la modélisation et de la turbulence dans la couche limite atmosphérique.

Je suis extrêmement reconnaissante à Mr. Philippe Drobinski pour son co-encadrement et l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ce stage.

Mes remerciements s'adressent aussi à toute l'équipe du Laboratoire de Météorologie Dynamique avec qui j'ai passé un agréable stage.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>7</b>
2.1	Présentation générale du modèle . . . . .	7
2.1.1	Équations du modèle . . . . .	7
2.1.2	Limites du modèle . . . . .	8
2.2	La couche d'Ekman . . . . .	8
2.3	Adimensionnement des équations . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Instabilité linéaire primaire</b>	<b>11</b>
3.1	Problème aux valeurs propres . . . . .	11
3.2	Perturbation la plus instable et nombre de Richardson critique : . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Saturation non linéaire</b>	<b>16</b>
4.1	Croissance des perturbations 2D et saturation de l'énergie . . . . .	16
4.2	Rouleaux exactement stationnaires . . . . .	17
4.3	Energie des rouleaux et instabilité statique . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Instabilité linéaire secondaire</b>	<b>22</b>
5.1	Croissance des perturbations 3D . . . . .	22
5.2	Étude énergétique . . . . .	25
5.2.1	Etude de l'énergie cinétique turbulente . . . . .	26
5.2.2	Etude de l'énergie potentielle . . . . .	28
<b>6</b>	<b>conclusions</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>Implantation et choix numériques</b>	<b>33</b>
<b>B</b>	<b>Méthode numérique</b>	<b>34</b>

# Table des figures

1.1	Décomposition de la couche limite atmosphérique . . . . .	5
2.1	Spirale d'Ekman.( <a href="http://www.meteo-midi.fr/couche_limite.html">http://www.meteo-midi.fr/couche_limite.html</a> ) . . . . .	8
3.1	Représentation du nouveau système d'axes étudié. . . . .	12
3.2	Taux de croissance (valeurs propres) pour le cas neutre : $Ri = 0$ (a), le cas stratifié instable : $Ri = 0,005$ (b), le cas stratifié instable : $Ri = 0,01$ (c) et le cas stratifié stable : $Ri = 0,03$ (d). . .	13
3.3	$\sigma_1$ en fonction du nombre de Richardson $Ri$ , pour $Re = 500$ et $1000$ et pour $Pr = 1$ . . . . .	14
3.4	Représentation des modes propres de l'instabilité linéaire primaire pour un nombre de Richardson $Ri = 5.10^{-3}$ , $Re = 500$ et $Pr = 1$ . . . . .	15
4.1	Évolution de l'énergie de la perturbation 2D dans le temps. . . . .	16
4.2	Développement de la perturbation 2D (phase non linéaire). . . . .	18
4.3	Représentation des champs totaux de vitesses et de flottabilité, les champs en couleur et les lignes de courant en noir pour $Ri = 5.10^{-3}$ , $Re = 500$ et $Pr = 1$ . . . . .	19
4.4	Variation de l'énergie en fonction du nombre de Richardson. . . . .	20
4.5	Variation du taux de croissance de la stabilité statique en fonction du nombre de Richardson pour $Re = 1000$ et $Re = 500$ et pour $Pr = 1$ . . . . .	20
5.1	Représentation de l'énergie $Ri = 1.8.10^{-3}$ (à droite) et $Ri = 1.5.10^{-3}$ (à gauche) . . . . .	23
5.2	Représentation des modes propres de l'instabilité linéaire secondaire pour un nombre de Richardson $Ri = 1.5.10^{-3}$ . . . . .	24
5.3	Variation de $\sigma_2$ en fonction du nombre d'onde $k_2$ pour différentes valeurs de Ri. . . . .	25
5.4	Variation de $\sigma_2$ en fonction de Ri. . . . .	25
5.5	Termes du bilan d'énergie cinétique turbulente : la $E_{TKE}$ , le terme de production, de dissipation et d'échange en couleur et les lignes de courant en noir . . . . .	27
5.6	Variation des taux de croissance des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente en fonction du nombre de Richardson. . . . .	28
5.7	Termes du bilan d'énergie potentielle : la $E_{TPE}$ , le terme de production, de dissipation et d'échange en couleur et les lignes de courant en noir . . . . .	29
5.8	Variation des taux de croissance des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente en fonction du nombre de Richardson, $Re=500$ , $Pr=1$ . . . . .	30

# Chapitre 1

## Introduction

La couche limite atmosphérique (CLA) est la zone d'interactions entre l'atmosphère et la surface terrestre. Son épaisseur varie d'une dizaine de mètres à plusieurs kilomètres, en fonction de la vitesse du vent, de la rugosité de surface et de l'ensoleillement local. Bien qu'elle représente une petite partie par rapport à toute l'atmosphère, la CLA a un impact important sur le temps et le climat. En effet elle représente un lieu d'échanges de quantité de mouvement ainsi que d'échange d'énergie entre la surface et l'atmosphère sous forme de vapeur d'eau et de chaleur. La turbulence y est un des processus fondamentaux contrôlant ces transferts d'énergie et de matière depuis la surface vers les niveaux verticaux supérieurs de l'atmosphère.

La CLA est constituée de trois parties distinctes d'épaisseur variable à savoir (voir figure (1.1)) [Stull, 1988] :

- La sous-couche rugueuse (de quelques millimètres à quelques mètres), elle se trouve au voisinage immédiat du sol. C'est une zone de mélange des sillages des obstacles rencontrés par le vent. C'est au travers de cette couche que se font les échanges de masse, d'énergie, et d'humidité entre le sol et la couche limite atmosphérique.
- La couche de surface (quelques dizaines à quelques centaines de mètres). Elle représente environ 10% de la couche limite atmosphérique. La turbulence y est homogène, et la force de Coriolis négligeable devant les forces de frottement dues au sol.
- La couche d'Ekman (de l'ordre du kilomètre). C'est une partie de la CLA où la force de Coriolis devient comparable aux forces de frottement au sol.

La couche limite atmosphérique est caractérisée par la présence de tourbillons horizontaux orientés dans la direction de l'écoulement moyen. L'origine de ces tourbillons est généralement attribuée à l'instabilité de la couche d'Ekman.

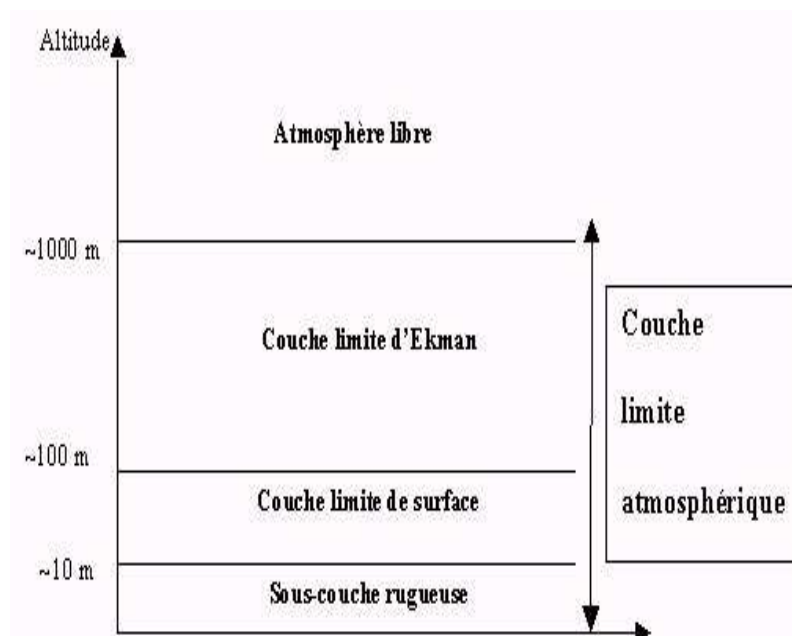


FIGURE 1.1 – Décomposition de la couche limite atmosphérique

Du point de vue de la prévision du temps et de la modélisation du climat, un enjeu important associé à la couche limite atmosphérique est de relier les flux de surface au bas de l'atmosphère libre, généralement à travers

un coefficient de friction ou une relation flux-gradient. Cet exercice est particulièrement difficile dans la CLA stable. Par exemple les modèles de climat sont très sensibles dans les hautes latitudes aux paramétrisations de CLA stable [King et al., 2007]. Pour une CLA neutre ou modérément convective, l'origine et l'intensité des flux sont mieux comprises, notamment grâce à des études idéalisées où l'écoulement moyen de la CLA est remplacé par l'écoulement d'Ekman laminaire, obtenu pour une viscosité constante. En particulier il a été montré que l'émergence de rouleaux longitudinaux peut se comprendre comme le résultat de l'instabilité primaire de l'écoulement d'Ekman et de sa saturation non-linéaire [Lilly, 1966a, Foster, 2005]. Outre son intérêt météorologique, l'écoulement d'Ekman se forme dans tout les fluides en rotation, et présente donc un intérêt fondamental et industriel.

Néanmoins la description et la compréhension de la transition vers la turbulence de l'écoulement d'Ekman est très incomplète. Une étude de cette transition dans le cas d'une couche d'Ekman stratifiée a été établi en se basant sur l'étude de la stabilité linéaire primaire [Brown, 1972]. La couche d'Ekman a été aussi étudiée pour le cas neutre où une étude de la stabilité secondaire des rouleaux a été faite [Dubos et al., 2008]. Cependant, l'étude de l'instabilité linéaire secondaire pour une couche instable fortement stratifiée reste inachevée. C'est ce que nous allons étudier durant ce travail tout en se basant sur les études anciennes.

Nous allons présenter dans le premier chapitre le cadre général du travail en passant par une présentation générale du modèle ainsi que les équations de base utilisées. Dans le deuxième chapitre nous allons étudier l'instabilité linéaire primaire comme étant une conséquence de l'ajout d'une perturbation infinitésimale bidimensionnelle. Le troisième chapitre nous décrit la saturation non linéaire à laquelle aboutit les rouleaux. Et enfin, dans le dernier chapitre, nous allons voir les conséquences de l'ajout d'une petite perturbation tridimensionnelle aux rouleaux stationnaires saturés et cela en étudiant l'instabilité linéaire secondaire.

# Chapitre 2

## Position du problème

### 2.1 Présentation générale du modèle

Il s'agit d'un modèle numérique de simulation de la turbulence dans la couche d'Ekman. C'est un modèle conceptuel qui permet de d'écrire de façon formelle les données qui seront utilisées par le système d'équations physiques. Il s'agit donc d'une représentation des données, facilement compréhensible, permettant de décrire le système d'information à l'aide de variables physiques bien définies dès le début des simulations.

#### 2.1.1 Équations du modèle

Les équations de bases de ce modèle sont les équations de Navier Stokes(2.1).

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\omega} + \mathbf{f}) \times \hat{\mathbf{U}} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{\rho} \nabla \hat{P} - \hat{\mathbf{b}} = \nu \Delta \hat{\mathbf{U}} \quad (2.1)$$

Où :

- $\rho$  est la masse volumique du fluide ;
- $\nu$  est la viscosité ;
- $\mathbf{f}$  est le paramètre de Coriolis tel que  $f = 2\Omega \sin\phi$  avec  $\Omega$  est le vecteur rotation de la terre et  $\phi$  est la latitude à un point donné.
- $\hat{\mathbf{U}}$  est l'écoulement total,  $\hat{P}$  est la pression,  $\hat{\omega}$  est la vorticité et  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{b} \cdot \mathbf{e}_z$  est la flottabilité.

La flottabilité  $\hat{b}$  est définie telle que  $\hat{b} = -g \cdot \frac{T'}{T} = g \cdot \frac{\rho'}{\bar{\rho}}$  où  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $T$  la température,  $\bar{T}$  la température moyenne,  $\rho$  la masse volumique et  $\bar{\rho}$  est la masse volumique moyenne.

A ces équations on ajoute l'équation de l'équilibre thermique représentée par l'équation de l'évolution de la flottabilité dans l'approximation de Boussinesq (2.2).

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{b}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{b}}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial \hat{b}}{\partial z} + N^2 \hat{w} = \kappa \Delta \hat{b} \quad (2.2)$$

- $N^2$  est le carré de la fréquence de Brunt Väisälä telle que  $N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ .
- $\kappa$  est la diffusivité thermique.

Nous ajoutons à la flottabilité  $\hat{b}$  qui représente en réalité l'écart à la stratification, le terme  $N^2 \cdot z$  qui est la stratification verticale et donc nous obtenons une flottabilité totale qui se décompose comme suit :  $\hat{b}_{totale} = \hat{b} - N^2 \cdot z$ .

L'approximation de boussinesq est généralement utilisée lorsque la couche d'atmosphère que l'on veut étudier est suffisamment mince pour qu'on puisse négliger les variations verticales de masse volumique. Elle est bien validée pour les études de la couche limite atmosphérique car dans le premier kilomètre au dessus de la surface, la masse volumique varie en moyenne de moins de 10%. [Stull, 1988].

Dans les équations (2.1) et (2.2), le symbole « $\hat{\ }$ » indique que ces variables ont des dimensions (les dimensions universelles connues). Dans la suite nous allons adimensionner ces équations.



### 2.1.2 Limites du modèle

Dans ce modèle nous ne tenons pas compte de certaines variable physiques. En effet, les échanges de vapeur d'eau telles que les précipitations, les évaporations qui peuvent exister entre l'atmosphère et la surface ainsi que les échanges radiatifs ont été négligés malgré leur importance sur les bilans dynamiques ou énergétiques.

## 2.2 La couche d'Ekman

Pour ce travail nous avons pris comme écoulement de base l'écoulement d'Ekman. Il s'agit d'une solution stationnaire, homogène horizontalement pour les équations de Navier Stokes dans le cas incompressible. Les solutions sont données par le système (2.3) où  $G$  représente le vent géostrophique et  $\delta_E$  l'épaisseur de la couche d'Ekman [Stull, 1988].

$$\begin{cases} \hat{u}_E = G [1 - e^{-\delta_E \cdot z} \cos(\delta_E \cdot z)] \\ \hat{v}_E = G [1 - e^{-\delta_E \cdot z} \sin(\delta_E \cdot z)] \\ \hat{w}_E = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

La forme spatiale de ces solutions est une spirale dite spirale d'Ekman(2.1), en effet la couche d'Ekman est caractérisée par une rotation de la direction du vent avec l'altitude

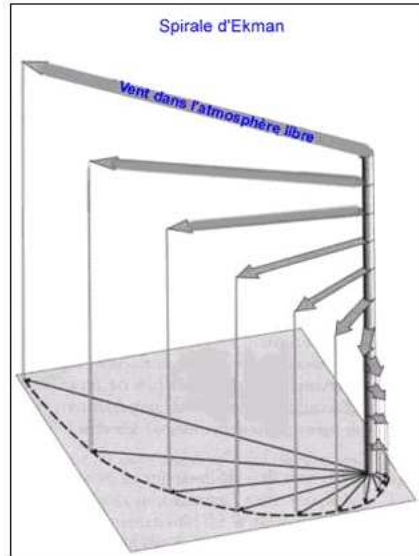


FIGURE 2.1 – Spirale d'Ekman.([http://www.meteo-midi.fr/couche\\_limite.html](http://www.meteo-midi.fr/couche_limite.html))

A ces solutions on ajoute la flottabilité liée à l'écoulement d'Ekman,  $\hat{b}_E = -N^2 \cdot z$  où  $N^2$  est le carré de la fréquence de Brunt Väisälä.

Durant ce travail, l'écoulement d'Ekman sera l'écoulement de base qui est unidimensionnel suivant  $z$  et stationnaire ( $\mathbf{U}_E(z)$ ) auquel nous allons ajouter en premier lieu une petite perturbation bi-dimensionnelle suivant  $x$  et  $z$  ( $\mathbf{U}_{2D}(x, z, t)$ ) puis une deuxième perturbation infinitésimale tri-dimensionnelle suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$  ( $\mathbf{U}_{3D}(x, y, z, t)$ ). A la fin l'écoulement totale sera sous la forme d'une somme des trois termes (2.4).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}_E(z) + \mathbf{U}_{2D}(x, z, t) + \mathbf{U}_{3D}(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

## 2.3 Adimensionnement des équations

Cette étape nous permettra de mieux comparer l'ordre de grandeur de chaque terme de l'équation et estimer ainsi s'il est négligeable.

Dans ce modèle nous allons considérer la normalisation des variables suivante :

–  $\mathbf{U} = \frac{\hat{\mathbf{U}}}{G}$  où  $G = \|\mathbf{U}_g\|$  est le module du vent géostrophique avec  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  et  $\mathbf{U}_g = (\mathbf{u}_g, \mathbf{v}_g, \mathbf{w}_g)$ .

- $P = \frac{\hat{P}}{\rho G^2}$ .
  - $\mathbf{x} = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\delta}$  où  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  est la position dans l'espace et  $\delta = \delta_E = \sqrt{\frac{2\nu}{f}}$  est l'épaisseur de la couche de mélange surfacique qui est notre cas la couche d'Ekman.
  - $t = \frac{\hat{t}}{\tau_{adv}}$  où  $\tau_{adv}$  est le temps d'advection tel que  $\tau_{adv} = \frac{\delta}{G}$ .
  - $\omega = \tau_{adv} \cdot \hat{\omega}$ .
  - $b = \frac{\hat{b}}{G \cdot N}$ .
- Le système d'équation s'écrit alors (2.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \mathbf{U} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - \left( \omega + \frac{2\nu}{G\delta} \mathbf{e}_z \right) \times \mathbf{U} - \nabla \left( P + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) + \frac{\nu}{G\delta} \Delta \mathbf{U} - \frac{N\delta}{G} b \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{N\delta}{G} w = \frac{\kappa}{\delta G} \Delta b \end{array} \right. \quad (2.5)$$

De ces variable nous définissons certains nombres sans dimensions : Reynolds (Re), Prandtl (Pr) et Richardson (Ri).

**Nombre de Reynolds :** Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. C'est ce nombre adimensionnel qui est utilisé pour caractériser le régime d'écoulement (laminaire, transition, turbulent) au sein de la cuve. Les valeurs du nombre de Reynolds pour lesquelles on change de régime d'écoulement en fonction du système d'agitation. On définit le nombre de Reynolds tel que  $Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$  avec V est la vitesse de l'écoulement, L une longueur caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

Aux faibles valeurs du Reynolds, les forces de viscosité sont prépondérantes, l'accélération convective étant négligée. On parle d'écoulement de Stokes dans ce cas les effets visqueux dominant sur les effets inertiels.

Ce nombre peut s'écrire en fonction des variable du problème tel que  $Re = \frac{G\delta}{\nu}$ .

**Nombre de Prandtl :** Le nombre de Prandtl est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique) et la thermique. On peut alors l'écrire sous la forme suivante :  $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{\rho C_p}} = \frac{\nu}{\kappa}$  avec  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $C_p$  est la chaleur massique et  $\lambda$  est la conductivité thermique.

En fonction des variables du problème ce nombre garde la même expression à savoir  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ .

**Nombre de Richardson :** Les termes de foçage thermique et dynamique permettent de caractériser différents régimes de turbulence. On définit ainsi un nombre sans dimension, qui est le nombre de Richardson de gradient Ri. Il s'agit du rapport entre les forces liées à l'énergie thermique et les forces inertielles et cela pour comparer l'importance de ces deux termes dans l'évolution de la turbulence ce qui établit donc les poids respectifs entre forces de flottabilité et forces inertielles.

Le nombre de Richardson caractérise la tendance au mélange dynamique des couches atmosphériques. Nous allons considérer durant ce travail un nombre de Richardson « global » défini par les variables du problème tel que  $Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}$ .

Le nombre de Richardson de gradient est définie par :  $Ri(z) = \frac{N^2}{\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}$  avec N est la fréquence de Brunt-Väisälä et V est la vitesse de l'écoulement.

Ce nombre nous permet d'obtenir les conditions de stabilité dynamique selon le critère de Miles (1961) telle que :

- Pour  $Ri = 0$  : il n'y a pas d'effet thermique sur la turbulence (les effets de flottabilité sont négligeables) ; seul le cisaillement du vent peut être à l'origine de la turbulence. On est alors dans un régime de *turbulence neutre*.
- Pour  $|Ri| \ll 1$  : les effets de flottabilité sont très faibles devant les effets d'inertie. On reste proche du régime neutre et on est dans le régime de *convection forcée*.
- Pour  $Ri < 0.25$  : les effets de la stratification stable ne sont pas assez puissants pour empêcher la production de turbulence. Le milieu est dynamiquement instable. On est donc dans le cas d'un régime *instable*.
- Pour  $Ri = 0.25$  où 0.25 représente le nombre de Richardson critique (Ric). A partir de Ric il y a transition du régime instable au régime stable.
- Pour  $Ri > 0.25$  : l'écoulement est dynamiquement stable. Les processus associés à la flottabilité constituent un puits de turbulence. Il s'agit d'un régime *stable*.

En tenant compte des différents nombres sans dimension définis précédemment, notre système d'équation devient(2.6)[Dubos et al., 2008] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}\mathbf{U} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\left(\omega + \frac{2}{Re}\mathbf{e}_z\right) \times \mathbf{U} - \nabla\left(P + \frac{\mathbf{U}^2}{2}\right) + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{U} - \sqrt{Ri}b\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial b}{\partial t} + u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y} + w\frac{\partial b}{\partial z} + \sqrt{Ri}w = \frac{1}{Re.Pr}\Delta b \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Nous remarquons que le système est fortement dépendant des paramètres physiques c'est pourquoi nous allons essayer de varier le nombre de Richardson et le nombre de Reynolds pour voir la sensibilité du modèle à ces deux paramètres.

# Chapitre 3

## Instabilité linéaire primaire

L'étude de l'évolution d'une perturbation infinitésimale et de son effet sur l'écoulement a déjà été fait dans le cas d'une couche d'Ekman neutre [Dubos et al., 2008, Lilly, 1966a] et dans le cas d'une couche d'Ekman stratifiée [Brown, 1972]. Notre but dans ce chapitre est de trouver des résultats qui coïncident avec la littérature. Dans la suite (chapitre 3 et 4), nous allons étudier l'effet de la stratification sur l'écoulement total et pousser ce travail quand nous ajoutons une petite perturbation tridimensionnelle.

### 3.1 Problème aux valeurs propres

Comme nous avons mentionné, nous allons ajouter à notre écoulement de base (l'écoulement d'Ekman) une petite perturbation bidimensionnelle dépendant de  $x$  et  $z$  et voir son évolution au cours du temps et son effet sur l'écoulement totale qui s'écrit suivant le système (3.1).

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_E(z) + u_{2D}(x, z, t) \\ v(x, z, t) = v_E + v_{2D}(x, z, t) \\ w(x, z, t) = w_{2D}(x, z, t) \\ b(x, y, z) = b_E + b_{2D}(x, y, z) \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous avons pu se ramener à l'étude d'une instabilité linéaire car nous avons ajouté des perturbations d'amplitudes très faibles ce qui nous permet de négliger les produits de perturbations issus des termes non linéaires des équations et donc ne retenir que le système linéaire.

La perturbation 2D que nous avons ajoutée peut donc être représentée comme une superposition d'états élémentaires.(3.2)

$$\mathbf{U}_{2D}(x, z, t) = e^{\sigma_1 t} \cdot e^{ik_1 x} \cdot \mathbf{U}_{2D_{propre}}(z) + cc \quad (3.2)$$

$k_1$  est le vecteur d'onde,  $\sigma_1$  est le taux de croissance à déterminer et  $cc$  est le complexe conjugué. Ici, les  $\mathbf{U}_{2D_{propre}}(z)$  sont des profils inconnus qui ne dépendent que de  $z$  et qui, numériquement, se décomposent en éléments finis (voir annexe). Nous obtenons une perturbation sous la forme (3.3) :

$$\mathbf{U}_{2D}(x, z, t) = e^{\sigma_1 t} \cdot e^{ik_1 x} \cdot \sum_m a_m \cdot U_m(z) + cc \quad (3.3)$$

Il s'agit de perturbations périodiques de période  $\frac{2\pi}{k_1}$  qui se déplacent dans le référentiel  $(x, y)$  suivant  $x$  et indépendamment de  $y$ .

En introduisant cette solution dans l'équation de Navier Stokes on aboutira à un système dynamique qui vérifie(3.4) :

$$\sigma_1 M_{mn} \cdot A_n = S_{mn} A_n \quad (3.4)$$

où  $M_{mn}$  représente la matrice de masse et  $S_{mn}$  est la matrice qui regroupe les autres termes de l'équation à savoir la force de pression, la force de Coriolis, la force de viscosité et la force de flottabilité. La relation (3.4) est une relation linéaire, elle est sous la forme  $L_{mn} A_n = \sigma_1 A_n$  où  $L_{mn}$  est un opérateur linéaire.

Le problème se ramène donc à un problème aux valeurs propres. Nous allons donc déterminer à chaque fois les valeurs propres et les vecteurs propres (ou les modes) (les «  $A_n$  »).

La perturbation prépondérante est la perturbation la plus instable, c'est à dire celle qui a un taux de croissance le plus grand et donc la valeur propre la plus importante pour un nombre d'onde  $k_1$  bien déterminé.

### 3.2 Perturbation la plus instable et nombre de Richardson critique :

Nous allons maintenant définir un nouveau système d'axes  $(X, Y)$  de telle sorte que  $X$  soit parallèle au vecteur d'onde  $k_1 = (k_x, k_y)$  et  $Y$  l'axe orthogonal à  $X$ . Dans ce nouveau système les lignes de phase d'équation  $k_1 \cdot X = \text{constante}$  sont parallèles à  $Y$  et forment un angle  $\epsilon$  avec le vent géostrophique (figure(3.1)).

On définit aussi le nombre  $\alpha = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \|k_1\|$  qui représente l'amplitude du vecteur d'onde.

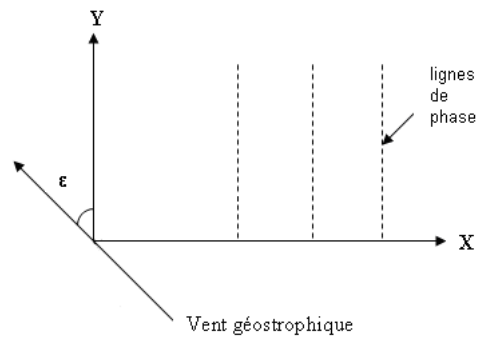


FIGURE 3.1 – Représentation du nouveau système d'axes étudié.

Nous représentons alors les valeurs du taux de croissance pour différentes valeurs du nombre de Richardson et pour des nombres de Reynolds et de Prandtl donnés afin d'extraire le taux de croissance maximal. Les quatre cas représentés sur la figure(3.2) sont donnés pour un nombre de Reynolds qui vaut 500 et un nombre de Prandtl qui vaut 1.

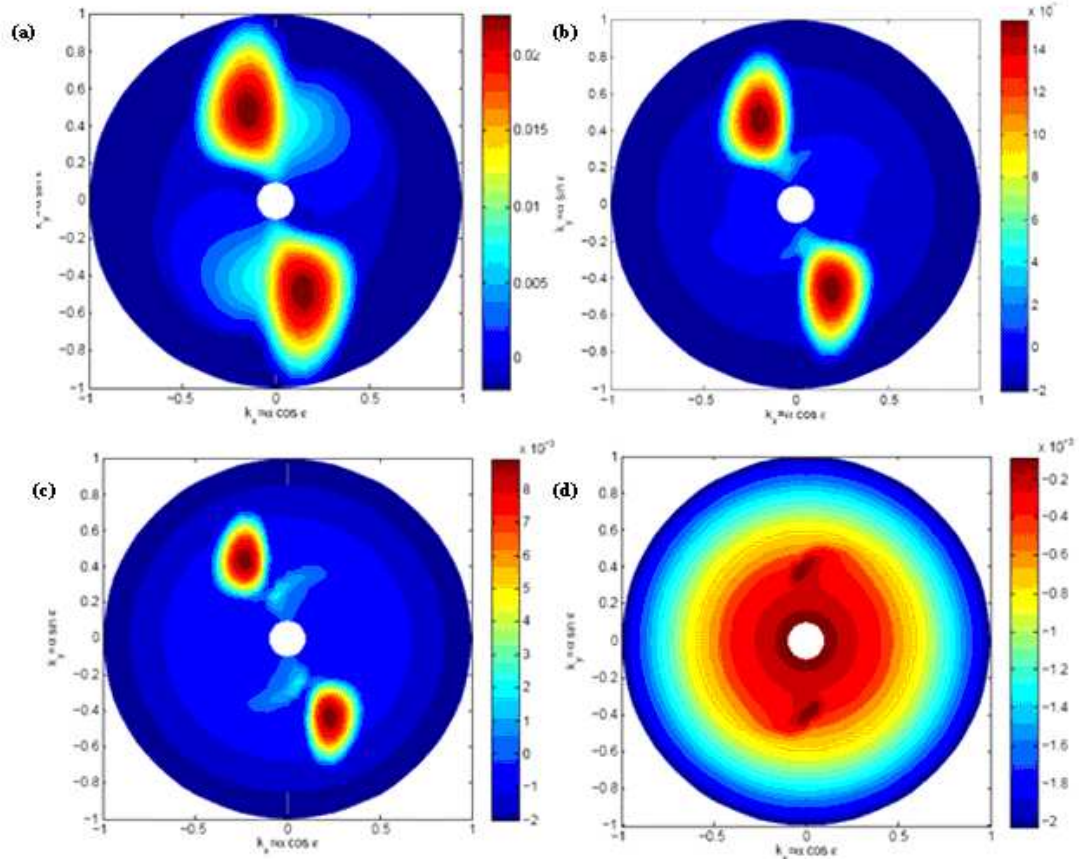


FIGURE 3.2 – Taux de croissance (valeurs propres) pour le cas neutre :  $Ri = 0$ (a), le cas stratifié instable :  $Ri = 0,005$ (b), le cas stratifié instable :  $Ri = 0,01$  (c) et le cas stratifié stable :  $Ri = 0,03$  (d).

A chaque cas correspond un taux de croissance maximal  $\sigma_1$ . Nous résumons les résultats de ces figures dans le tableau (3.1).

TABLE 3.1 – Taux de croissance de l'instabilité linéaire primaire pour le cas neutre,  $Ri = 0,005, Ri = 0,01$  et  $Ri = 0,03$ .

$Ri$	$\sigma_1$	$\alpha$	$\epsilon(^{\circ})$
0	0.0239	0.5	$17^{\circ}$
0.005	0.0164	0.5	$22.49^{\circ}$
0.010	0.0096	0.5	$27.62^{\circ}$
0.030	$2.45 \cdot 10^{-5}$	0.02	$34.71^{\circ}$

Nous remarquons qu'en augmentant le nombre de Richardson  $Ri$  le taux de croissance  $\sigma_1$  tend vers zéro c'est à dire nous nous approchons de la stabilité. En effet, lorsque le nombre de Richardson augmente, les forces thermiques (représentées ici par la force de flottabilité) dominent par rapport aux forces inertielles . Plus le cisaillement de vent est faible par rapport aux forces de flottabilité, plus la stratification thermique est importante ce qui tend à stabiliser le milieu.

Nous déterminons alors le nombre de Richardson critique  $Ri_c$  tel que pour  $Ri > Ri_c$  l'écoulement stratifié est stable contre les petites fluctuations et pour  $Ri < Ri_c$  l'écoulement est instable. la figure (3.3) représente la courbe des  $\sigma_1$  en fonction de  $Ri$  .

$Ri_c$  est le nombre de Richardson pour lequel  $\sigma_1$  s'annule.

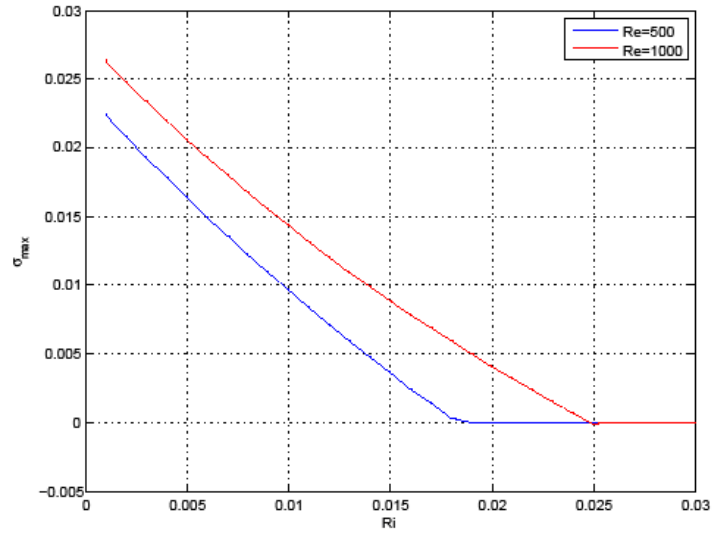


FIGURE 3.3 –  $\sigma_1$  en fonction du nombre de Richardson  $Ri$ , pour  $Re = 500$  et  $1000$  et pour  $Pr = 1$ .

Le nombre de Richardson critique dépend des autres paramètres tels que le nombre de Reynolds ou le nombre de Prandtl. Dans notre cas nous trouvons  $Ri_c = 0.0189$  pour  $Re = 500$  et  $Ri_c = 0.025$  pour  $Re = 1000$ . Les deux valeurs trouvées sont faibles par rapport au nombre de Richardson critique trouvé dans la littérature (critère de Miles 1960  $Ri_c = 0.25$ ). En effet ce qui est utilisé durant nos simulations est le nombre de Richardson « global » qui est définie précédemment alors que le nombre de Richardson utilisé dans la littérature est le nombre de Richardson défini localement. Une discussion sur le choix entre le nombre de Richardson global ou local a été traitée dans l'article de Brown, 1972.

Dans la suite on prendra un nombre de Richardson de telle sorte qu'on se trouve toujours dans le cas stratifié instable car c'est le cas qui nous intéresse le plus.

Le modèle nous permet aussi de représenter les modes propres, il s'agit de la représentation de la flottabilité et des champs de vitesses dans le repère  $(X, z)$ . La figure (3.4) représentent les modes propres pour le cas stratifié instable pour un nombre de Richardson qui vaut  $0.005$ .

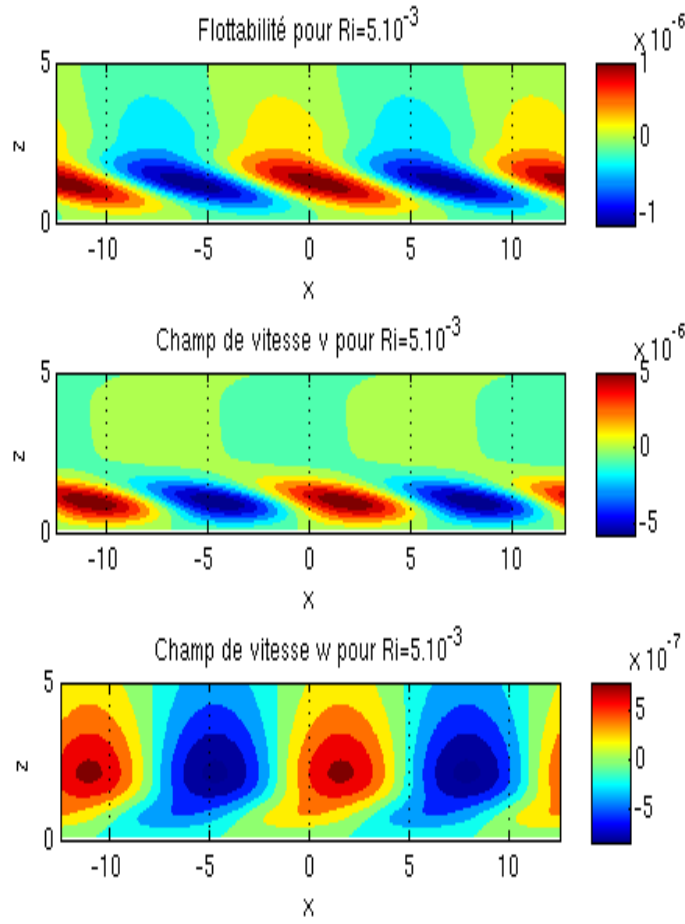


FIGURE 3.4 – Représentation des modes propres de l’instabilité linéaire primaire pour un nombre de Richardson  $Ri = 5.10^{-3}$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

La périodicité est bien claire sur la figure (3.4), sur cette figure nous représentons les modes propres sur deux périodes de temps.

Nous remarquons que l’amplitude de la perturbation est très faible. Les modes propres sont incapables de changer la forme de l’écoulement total. D’autre part, nous constatons que la flottabilité et le champ de vitesse  $v$  sont orientés de telle façon qu’ils suivent le cisaillement du vent. La flottabilité est positive pour des mouvements ascendants et donc dans ce cas le fluide lourd entoure le fluide léger et inversement elle est négative pour des mouvement descendants.



# Chapitre 4

## Saturation non linéaire

A un certain moment l'écoulement passe de la phase linéaire à la phase non linéaire jusqu'à atteindre la saturation. Dans la pratique, on peut remarquer la non linéarité quand l'amplitude de la perturbation devient assez grande pour qu'elle puisse modifier l'écoulement totale, mais aussi quand l'écoulement perd sa symétrie d'une demi période à une autre.

Nous sommes toujours dans le cas où l'écoulement total  $\mathbf{U}(X, Y, z, t) = \mathbf{U}_E(z) + \mathbf{U}_{2D}(X, z, t)$ .

### 4.1 Croissance des perturbations 2D et saturation de l'énergie

Une représentation de l'énergie totale de la perturbation nous permet de voir son évolution. La perturbation commence à croître d'une façon exponentielle (sous forme  $e^{\sigma_1 t}$ ) voir figure (4.1), il s'agit de la phase linéaire de la croissance de la perturbation. Durant cette phase, la perturbation prépondérante (et qui a la valeur propre la plus importante) garde le caractère linéaire de l'écoulement car son amplitude reste faible.

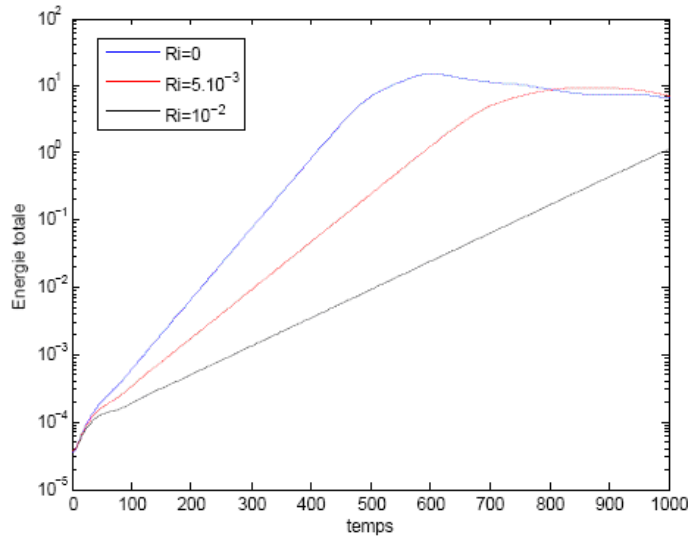


FIGURE 4.1 – Évolution de l'énergie de la perturbation 2D dans le temps.

Le temps que mettent ces perturbations pour croître est tel que  $\tau_1 = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\delta}{G}$ . Par exemple pour le cas  $(Re, Ri, Pr) = (500, 3.10^{-5}, 1)$  nous avons trouvé  $\sigma_1 = 0.0164$ , nous avons alors pour  $\delta = 300m$  et pour  $G = 10m.s^{-1}$ ;  $\tau_1 = 1829.26s \simeq 30.5min$ .

Après cette phase de croissance linéaire, nous remarquons que l'énergie oscille autour de valeurs pratiquement constantes. Il s'agit de l'état de la saturation des rouleaux. Ces derniers se déplacent avec une vitesse  $c$  constante (vitesse de translation ou de phase). Les perturbations conservent la même amplitude sans aucune déformation supplémentaire. L'amplitude de ces rouleaux devient assez importante pour modifier l'écoulement total. L'écoulement passe alors de la phase linéaire à la phase non linéaire. Il s'écrit sous la forme

$\mathbf{U}(X, z, t) = \mathbf{U}_E(z) + \mathbf{U}_{2D}(X - ct, z)$ . Nous sommes plus donc dans le cas d'un problème linéaire aux valeurs propres, les résultats obtenus dans la suite sont des résultats de simulations numériques directes. Il s'agit d'une résolution des équations de Naviers Stokes qui ont pour condition initiale l'écoulement d'ekman auquel nous avons ajouté la petite perturbation arbitraire.

Les simulations nous permettent alors de voir l'évolution de la vitesse et donc d'observer les rouleaux qui, à un certain moment, se déplacent sans se déformer. Nous remarquons que tout au long de ces simulations, plus nous augmentons le nombre de Richardson, plus nous atteignons la saturation lentement. En effet d'après la figure (4.1), nous pouvons voir que la saturation est atteinte pour le cas neutre ( $Ri = 0$ ) plus rapidement que les autres cas stratifiés instables où il faut augmenter la durée des simulations pour avoir des rouleaux saturés.

L'écoulement doit donc vérifier l'équation  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$  où  $c$  est la vitesse de déplacement des rouleaux.

## 4.2 Rouleaux exactement stationnaires

Durant nos simulations numériques l'état de saturation n'est pas parfaitement atteint, d'ailleurs la représentation de l'énergie (Figure (4.1)) montre que cette dernière oscille autour d'une valeur sans être parfaitement constante.

Pour atteindre un écoulement parfaitement en équilibre c'est-à-dire pour que  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$  vaut exactement zéro, nous allons procéder par la méthode de Newton en prenant comme état initial l'écoulement final calculé par la simulation. Par cette méthode nous obtenons une valeur exacte de la vitesse de translation  $c$  à la saturation.

Le tableau (4.1) résume quelques valeurs de  $c$  en fonction du nombre de Richardson en prenant  $Pr = 1$  et  $Re=500$ .

TABLE 4.1 – Différentes valeurs de la vitesse de phase  $c$  en fonction du nombre de Richardson.

$Ri$	$c$
0	-0.0380
0.005	-0.0902
0.010	-0.1275
0.030	-0.1705

En représentant l'état de la perturbation  $2D$  après la saturation (figure (4.2)), nous pouvons constater son amplitude élevée qui été de l'ordre de  $10^{-6}$  aux début.

La figure (4.2) nous montre les champs de vitesse et de la flottabilité après la saturation. Nous avons des valeurs positives de la flottabilité qui correspondent à un fluide lourd alors que les valeurs négatives représentent un fluide léger. Et donc nous remarquons que la perturbation apporte le fluide léger vers le bas et le fluide lourd vers le haut.

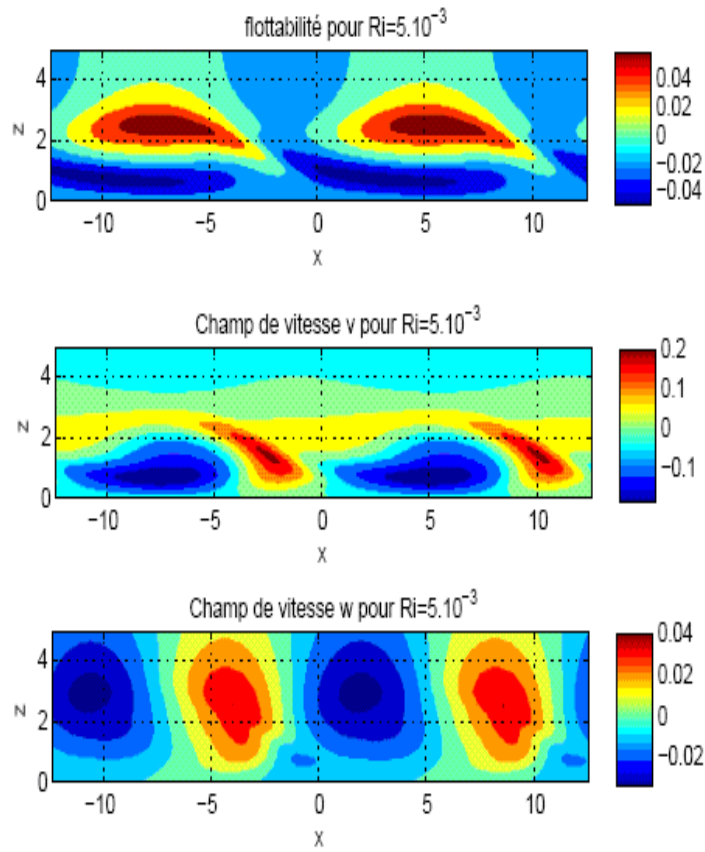


FIGURE 4.2 – Développement de la perturbation 2D (phase non linéaire).

L'effet de l'évolution de la perturbation devient assez remarquable sur les champs totaux de vitesse et de flottabilité . Une représentation de ces champs (figure (4.3)) peut nous donner une idée générale sur l'écoulement final auquel nous allons ajouter une perturbation tridimensionnelle (chapitre 4).

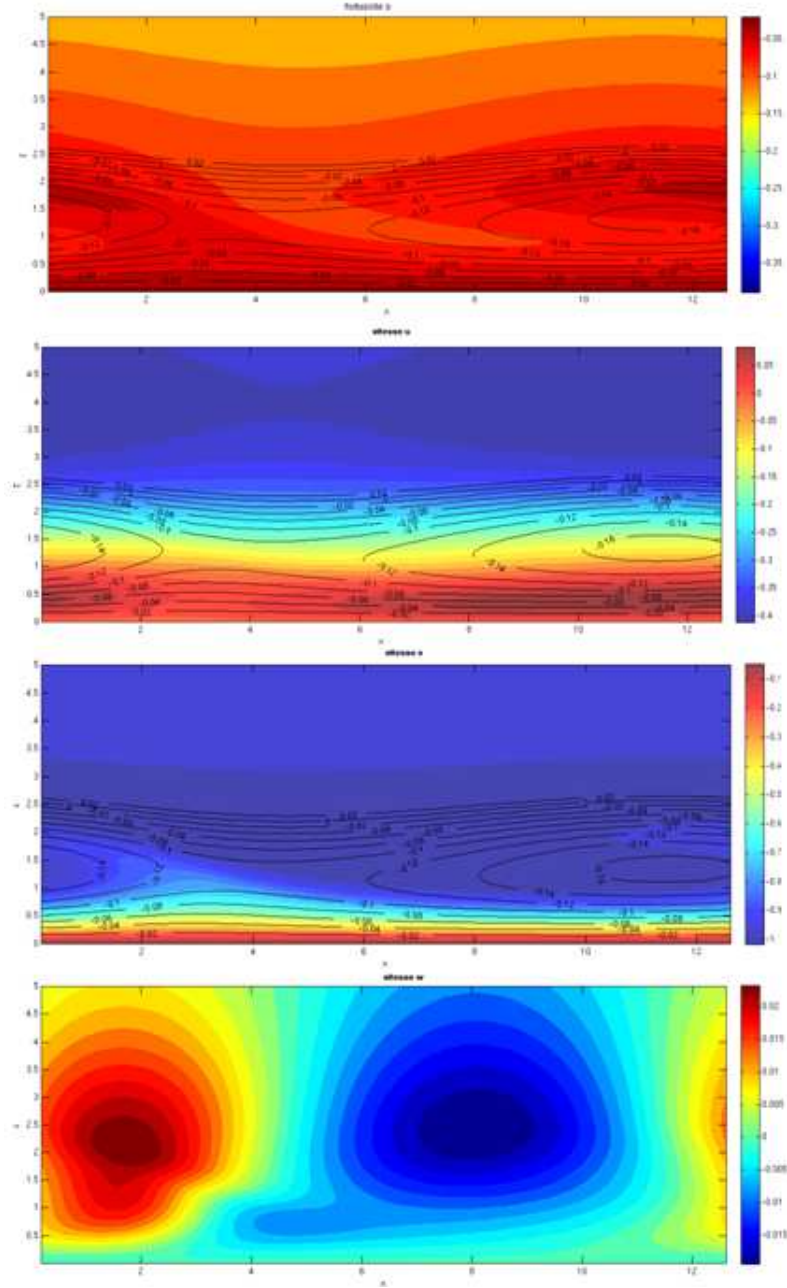


FIGURE 4.3 – Représentation des champs totaux de vitesses et de flottabilité, les champs en couleur et les lignes de courant en noir pour  $Ri = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

### 4.3 Energie des rouleaux et instabilité statique

L'énergie représentée par la figure (4.4) est l'énergie turbulente totale(4.1).

$$\hat{E}_T = \hat{E}_{TKE} + \hat{E}_{TPE} \quad (4.1)$$

Avec  $\hat{E}_{TKE} = \frac{1}{2} (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)$  représente l'énergie cinétique turbulente où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les trois composante de la vitesse et  $\hat{E}_{TPE} = \frac{1}{2} \frac{\hat{b}^2}{N^2}$  représente l'énergie turbulente potentielle où  $b$  est la flottabilité. Si nous adimensionnons la relation (4.1), nous obtenons  $E_T = G^2 \cdot (E_{TKE} + E_{TPE})$  où  $G$  est le vent géostrophique.

L'énergie turbulente totale est représenté sur la figue (4.4) tracée pour  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

Nous remarquons que l'énergie cinétique intégrée sur  $z$  et moyennée sur  $X$  et qui représente donc la somme de  $\int u^2 dz$ , de  $\int v^2 dz$  et de  $\int w^2 dz$ , décroît en augmentant le nombre de Richardson. En effet, plus  $Ri$  est grand,

plus la stratification augmente et le milieu s'approche encore plus de la stabilité dynamique. La diminution donc de l'énergie cinétique est liée à la diminution du mouvement de l'écoulement.

En ce qui concerne l'énergie potentielle, sa valeur dépend de la formation des rouleaux. Elle est nulle pour un  $Ri$  qui vaut zéro, puisque nous sommes dans le cas neutre (il n'y a pas de stratification thermique) et elle commence à croître jusqu'à atteindre une valeur de 0.017 à  $Ri = 0.0075$ . Pour des  $Ri$  supérieurs à cette valeur, la stratification tend à stabiliser les rouleaux ce qui tend à stabiliser le transport de la flottabilité et donc à annuler l'énergie potentielle.

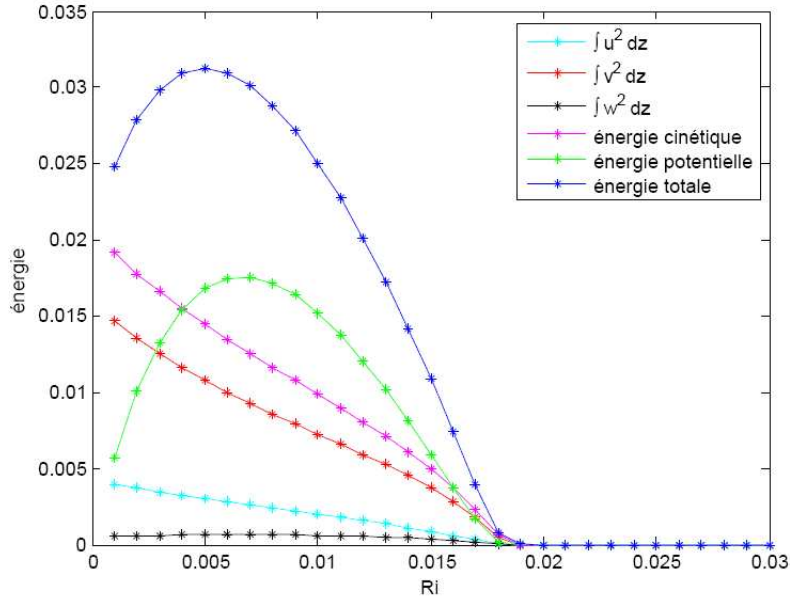


FIGURE 4.4 – Variation de l'énergie en fonction du nombre de Richardson.

Au total nous avons une d'énergie qui atteint un maximum pour un Richardson aux alentours de  $5 \cdot 10^{-3}$ , il s'agit d'un cas stratifié intéressant à étudier. Au-delà de cette valeur, l'énergie décroît jusqu'à s'annuler une fois que l'instabilité primaire disparaît.

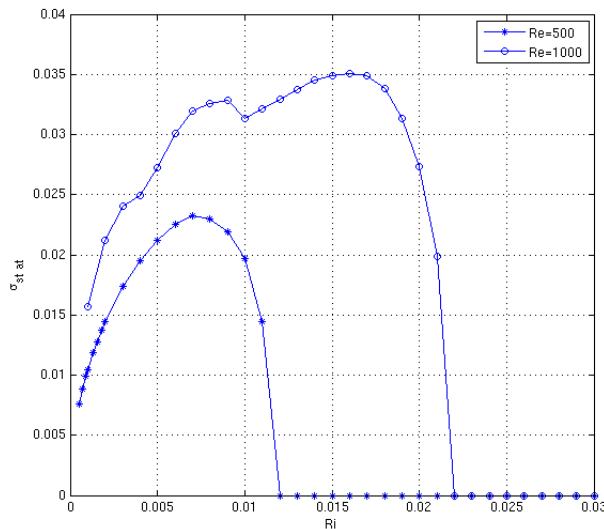


FIGURE 4.5 – Variation du taux de croissance de la stabilité statique en fonction du nombre de Richardson pour  $Re = 1000$  et  $Re = 500$  et pour  $Pr = 1$ .

L'étude de la stabilité statique représentée par son taux de croissance  $\sigma_{stat}$  nous permet de voir l'importance de l'effet de la stratification thermique sur les rouleaux.

Ici,  $\hat{\sigma}_{stat}^2 = \frac{\partial b_{totale}}{\partial z}$  et donc  $\hat{\sigma}_{stat} = \sqrt{\frac{\partial \hat{b}}{\partial z} - N^2}$ , nous aurons alors  $\sigma_{stat} = \frac{\delta}{G} \hat{\sigma}_{stat} = \sqrt{\sqrt{Ri} \frac{\partial b}{\partial z} - Ri}$ . La figure (4.5) est donnée pour les nombres de Reynolds  $Re = 500$  et  $Re = 1000$  et pour  $Pr = 1$ . Cette figure coïncide

bien avec l'évolution de l'énergie potentielle. En effet, nous obtenons des valeurs maximales pour des Richardson proche de  $5 \cdot 10^{-3}$ . Nous remarquons aussi que le taux de croissance de la stabilité statique pour Reynolds égal à 1000 est plus élevé que celui pour Reynolds égal à 500, ce qui exprime la forte dépendance de la stratification au nombre de Reynolds.

La stratification est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est grand et donc l'écoulement est statiquement plus stable. Nous avons un coefficient de diffusivité thermique  $\kappa = \frac{\delta G}{Re \cdot Pr}$ , en raisonnant par rapport à ce nombre, plus le nombre de Reynolds est grand, plus  $\kappa$  prend des valeurs faibles et donc la diffusion thermique diminue ce qui fait augmenter la stratification.

Nous avons constaté que la courbe correspondante à un nombre de  $Re = 1000$  qui représente le taux de croissance de l'instabilité statique, n'a pas un aspect régulier. Nous avons compris alors que nous étions à des limites dans nos calculs numériques (voir annexe). Pour ces raisons numériques nous avons décidé de se limiter dans la suite à un nombre de Reynolds qui vaut 500.

# Chapitre 5

## Instabilité linéaire secondaire

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une perturbation 2D infinitésimale que nous avons ajouté à notre écoulement de base croît linéairement jusqu'à une saturation non linéaire. Dans ce chapitre nous allons ajouter une autre perturbation aléatoire infinitésimale mais qui soit tridimensionnelle. Nous chercherons alors les taux de croissance correspondants ainsi que leur modes propres. Et nous finissons par une étude énergétique pour comprendre l'effet de la variation du nombre de Richardson sur les taux de croissances.

### 5.1 Croissance des perturbations 3D

Nous partons comme état initial des rouleaux stationnaires saturées auxquels nous allons ajouter une perturbation tri-dimensionnelle aléatoire très petite  $U_{3D}$  tel que  $\int U_{3D} dY = 0$  et suivre son évolution dans le temps. L'ajout de cette perturbation nous permettra de passer de la phase non linéaire à la phase linéaire. Nous avons un écoulement total qui vérifie le système d'équation (5.1).

$$\begin{cases} u(X - ct, z) = u_E(z) + u_{2D}(X - ct, z) + u_{3D}(X, Y, z, t) \\ v(X - ct, z) = v_E + v_{2D}(X - ct, z) + v_{3D}(X, Y, z, t) \\ w(X - ct, z) = w_{2D}(X - ct, z) + w_{3D}(X, Y, z, t) \\ b(X - ct, z) = b_E + b_{2D}(X - ct, z) + b_{3D}(X, Y, z, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Comme dans le cas de l'instabilité linéaire primaire cette perturbation peut s'écrire sous la forme d'une superposition de modes exponentiellement croissants (sous la forme  $e^{\sigma_2 t}$ ) tel que  $\mathbf{U}_{3D}(X, Y, z, t) = e^{\sigma_2 t} \cdot e^{ik_2 Y} \cdot \mathbf{U}_{3D_{propre}}(X - ct, z) + cc$  où  $k_2$  est le vecteur d'onde,  $\sigma_2$  est le taux de croissance et  $cc$  est le complexe conjugué. Ici, les  $\mathbf{U}_{3D_{propre}}(X - ct, z)$  dépendent de  $X$  et de  $z$  et qui, numériquement, se décomposent en éléments finis (voir annexes)., ils se déplacent avec la vitesse de phase  $c$ .

Le problème comme dans le chapitre 3 revient à résoudre un problème aux valeurs propres. Contrairement au deuxième chapitre, nous ne ferons pas référence à la résolution d'un système linéaire d'une façon purement algébrique mais nous allons procéder par des intégrations directes des équations de Navier Stokes. En effet, les  $\mathbf{U}_{3D_{propre}}(X - ct, z)$  que nous avons utilisés dépendent de beaucoup plus de paramètres inconnus par rapport à l'étude de l'instabilité linéaire primaire. Les matrices utilisées seront donc énormes c'est pour cela que nous avons choisit de travailler avec les intégrations directes.

Nous pouvons alors déterminer le taux de croissance de la perturbation tridimensionnelle  $\sigma_2$  en se basant sur la courbe d'énergie totale. L'écoulement  $U$  est proportionnel à  $e^{\sigma_2 t}$  ( $U \sim e^{\sigma_2 t}$ ) et nous avons alors  $E \sim U^2 \sim e^{2\sigma_2 t}$ . Le taux de croissance  $\sigma_2$  peut être donc extrait de l'énergie des perturbations 3D et cela en calculant la pente de la partie linéaire  $\sigma_2 = \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{(t_1 - t_2)}$ .

Pour le cas  $Ri = 1.8 \cdot 10^{-3}$  (figure (5.1), à gauche), nous avons choisi les couples (Energie, temps) suivants : (7.609.10<sup>4</sup>,80) et (4.24.10<sup>5</sup>,160). Nous avons trouvé un  $\sigma_2$  qui vaut 0.0108.

Pour le cas  $Ri = 1.5 \cdot 10^{-3}$  (figure (5.1), à droite), nous avons choisi les couples (Energie, temps) suivants : (9.06.10<sup>4</sup>,80) et (1.06.10<sup>6</sup>,180). Nous avons trouvé un  $\sigma_2$  qui vaut 0.0123.

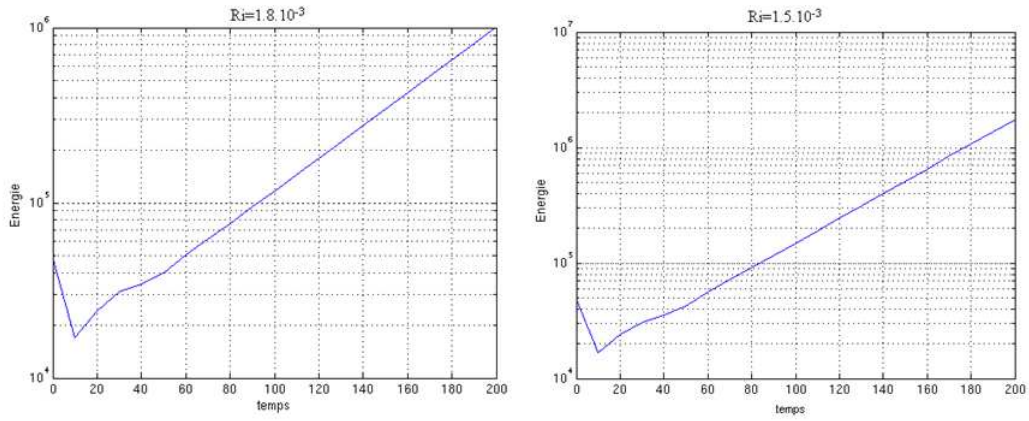


FIGURE 5.1 – Représentation de l'énergie  $Ri = 1.8 \cdot 10^{-3}$  (à droite) et  $Ri = 1.5 \cdot 10^{-3}$  (à gauche)

Pour mieux visualiser le comportement de la perturbation 3D, nous allons représenter les modes propres secondaires et qui représentent la flottabilité et les différents champs de vitesses (figure 5.2) pour  $Ri = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

La représentation des modes propres montre que la perturbation est localisée le long des lignes de courant passant par un point hyperbolique (il s'agit du point où les lignes de courant sont à la position  $X = 4$  pour la figure (5.2)).



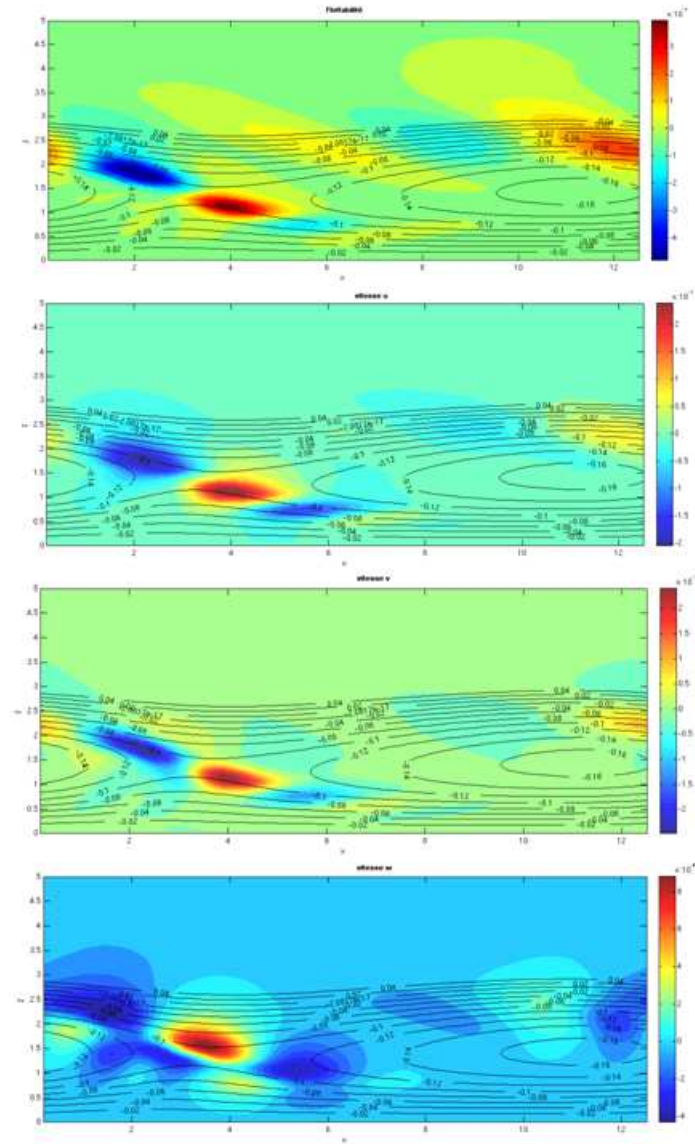


FIGURE 5.2 – Représentation des modes propres de l’instabilité linéaire secondaire pour un nombre de Richardson  $Ri = 1.5 \cdot 10^{-3}$

Ce pendant les valeurs trouvées de  $\sigma_2$  restent approximatives. Il faut à chaque fois choisir le nombre d’onde  $k_2$  et déterminer  $\sigma_2$ . La détermination de  $\sigma_2$  avec une manière plus précise est possible numériquement en utilisant la méthode de Krylov. Cette méthode est une méthode itérative moderne qui résous des problèmes aux valeurs propres. Elle est basée sur des principes d’orthogonalisation ou de minimisation.

Afin de compléter les valeurs de  $\sigma_2$  pour d’autres valeurs de  $k_2$ , nous avons fait des boucles successives pour  $k_2$  allant de 1.5 jusqu’à 2.5 et cela en changeant à chaque fois la valeur du nombre de Richardson. Nous obtenons alors la figure (5.3) .

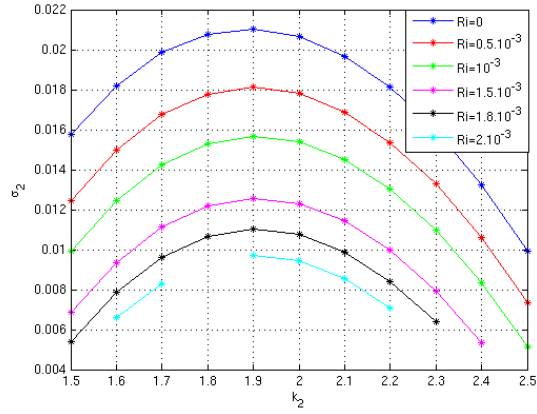


FIGURE 5.3 – Variation de  $\sigma_2$  en fonction du nombre d'onde  $k_2$  pour différentes valeurs de  $Ri$ .

Pour un nombre d'onde donné ( $k_2 = 1.9$ ), le tableau (5.1) nous donne quelques valeurs de  $\sigma_2$  en variant le nombre de Richardson, ces valeurs sont représentées sur la figure (5.4).

TABLE 5.1 – Taux de croissance  $\sigma_2$  en fonction du nombre de Richardson.

$Ri$	0	$0.5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_2$	0.021	0.018	0.015	0.012	0.011	0.0095

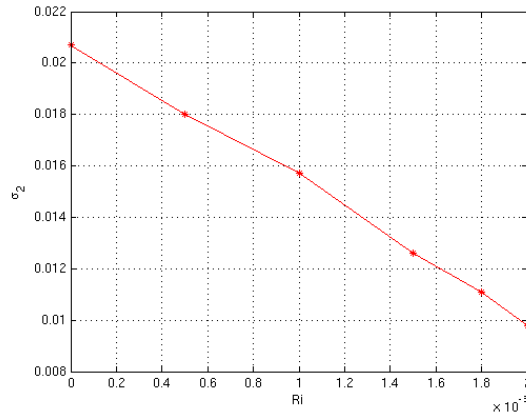


FIGURE 5.4 – Variation de  $\sigma_2$  en fonction de  $Ri$ .

En allant vers des nombres de Richardsons plus élevés, nous remarquons que le taux de croissance diminue considérablement. Au delà de  $Ri = 2.10^{-3}$  la méthode de Krylov ne converge. Nous pouvons chercher les modes propres secondaires pour des nombre d'onde différents ou aussi jouer sur les différents paramètres de la méthode de Krylov (tolérance, nombre d'itérations, etc).

## 5.2 Étude énergétique

Nous allons étudier la variation dans le temps de l'énergie turbulente totale qui se décompose, comme nous avons vu dans les chapitres précédents, en énergie cinétique turbulente et énergie potentielle :  $E_T = (E_{TKE} + E_{TPE})$ .

Nous allons se baser sur les équations de Naviers Stokes (le système d'équations (2.6)). Les champs de vitesse et de flottabilité seront décomposés en perturbation 2D et 3D tel que (5.2).

$$\begin{aligned}
 u &= u_{2D} + u_{3D} \\
 v &= v_{2D} + v_{3D} \\
 w &= w_{2D} + w_{3D} \\
 b &= b_{2D} + b_{3D}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

### 5.2.1 Etude de l'énergie cinétique turbulente

Comme nous avons vu précédemment, la  $E_{TKE}$  est proportionnelle à la somme des carrés des différentes composantes de la vitesse.

Nous obtenons suite à la décomposition (5.2) l'équation (5.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_{3D}^2}{2} + \frac{v_{3D}^2}{2} + \frac{w_{3D}^2}{2} \right) = & u_{3D} \cdot u_{3D} \cdot \frac{\partial u_{3D}}{\partial x} + u_{3D} \cdot w_{3D} \cdot \frac{\partial u_{3D}}{\partial z} + u_{3D} \cdot w_{3D} \cdot \frac{\partial w_{3D}}{\partial x} + w_{3D} \cdot w_{3D} \cdot \frac{\partial w_{3D}}{\partial z} \\ & + u_{3D} \cdot v_{3D} \cdot \frac{\partial v_{3D}}{\partial x} + v_{3D} \cdot w_{3D} \cdot \frac{\partial v_{3D}}{\partial z} \\ & - \sqrt{Ri} w_{3D} b_{3D} \\ & - \frac{1}{Re} (u_{3D} \Delta u_{3D} + v_{3D} \Delta v_{3D} + w_{3D} \Delta w_{3D}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

La variation de l'énergie cinétique turbulente peut être décomposée donc respectivement suivant la relation (5.4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{TKE}}{\partial t} = & P_{TKE}(cross - roll) \\ & + P_{TKE}(axiale) \\ & - X_{ech} \\ & - D_{TKE} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$P_{TKE}$  représente les termes de production de l'énergie cinétique turbulente et qui peut être décomposée en production axial (suivant l'axe y) et en production reliée aux croisements des rouleaux ou "cross-roll" comme l'a définie Dubos, 2008 (suivant les axes x et z).

$D_{TKE}$  représente les termes de dissipation de l'énergie cinétique et  $X_{ech}$  représente les termes d'échanges entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Afin de localiser la perturbation 3D dans l'espace, nous avons représenté les différents termes de l'équation (5.4) dans le système d'axe (x,z). Nous avons choisi pour cette représentation le cas de  $Ri = 1.5 \cdot 10^{-3}$  (figure 5.5).

Les différents termes de l'équation du bilan de l'énergie cinétique turbulente sont moyennés sur l'axe des y. Nous remarquons que la concentration de la  $E_{TKE}$  se trouve au niveau du croisement des lignes de courants. Il s'agit non seulement de l'influence des termes de production (axial ou cross-roll) et des termes de dissipations mais qui se localise à cet endroit mais aussi le terme d'échange qui est positif à ce niveau ce qui veut dire que l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et donc ce terme va jouer dans ce cas le rôle d'un puits d'énergie. Alors que quand il est négatif ailleurs, il aura un rôle de production d'énergie cinétique puisque dans ce cas c'est l'énergie potentielle qui se transforme en énergie cinétique turbulente.

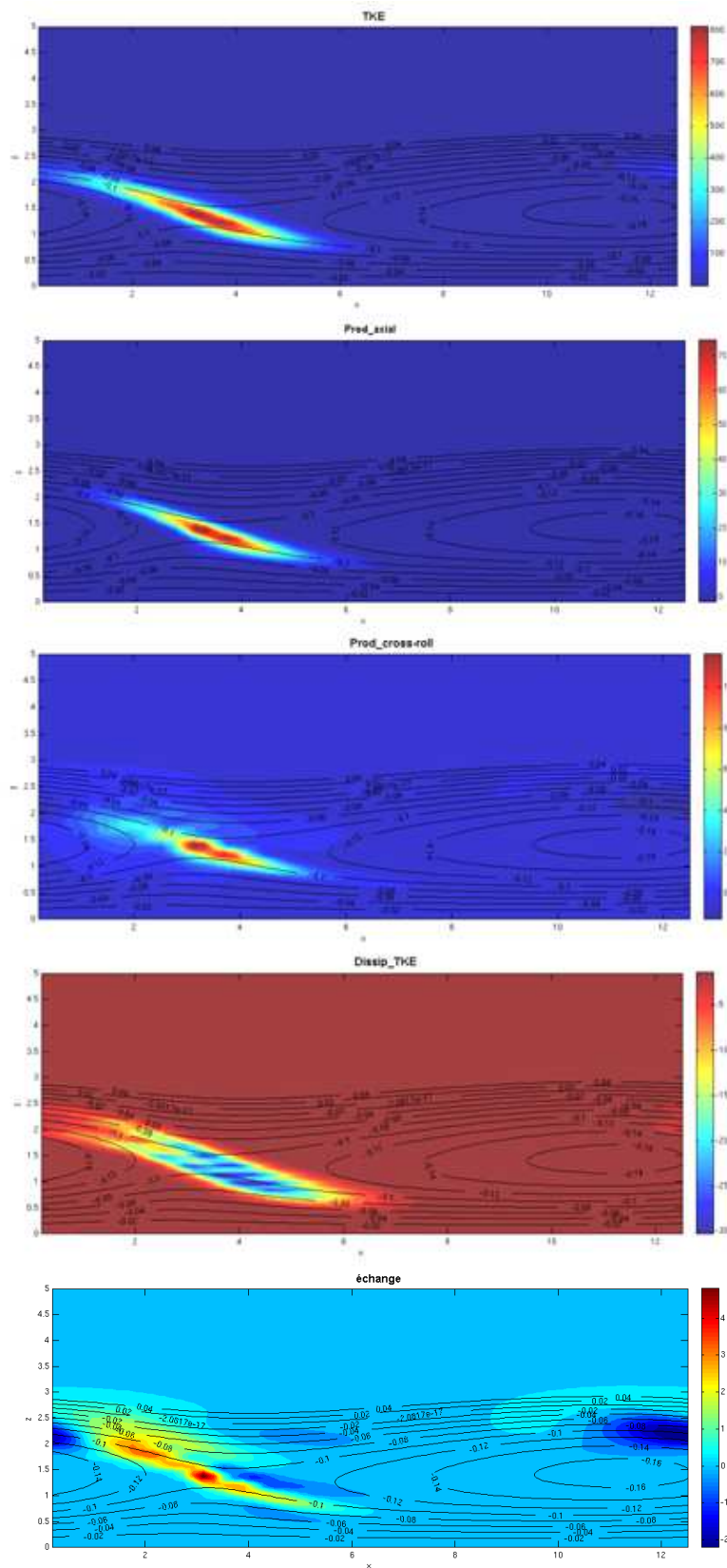


FIGURE 5.5 – Termes du bilan d'énergie cinétique turbulente : la  $E_{TKE}$ , le terme de production, de dissipation et d'échange en couleur et les lignes de courant en noir ..

Pour voir l'importance de l'influence de chaque terme, nous avons représenté leur taux de croissance (figure(5.6)) en fonction du nombre de Richardson pour  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

Les taux décroissance sont définies tel que :  $\sigma_{axial_{TKE}} = \frac{P_{TKE(axiale)}}{E_{TKE}}$ ;  $\sigma_{cross-roll_{TKE}} = \frac{P_{TKE(cross-roll)}}{E_{TKE}}$ ;  $\sigma_{dissip_{TKE}} = \frac{D_{TKE}}{E_{TKE}}$  et  $\sigma_{échange_{TKE}} = \frac{X_{ech}}{E_{TKE}}$ .

Les taux de décroissance doivent vérifier la relation  $\sigma_{2_{TKE}} = \sigma_{axial_{TKE}} + \sigma_{cross-roll_{TKE}} - \sigma_{dissip_{TKE}} - \sigma_{exchange_{TKE}}$ . Avec  $\sigma_{2_{TKE}} = \sigma_2$  qui est le taux de croissance de la perturbation 3D, et les autres taux de croissance sont respectivement le taux de croissance des termes de production axiale, de production "cross-roll", de dissipation et d'échange.

D'après la figure (5.6), nous remarquons que le taux de croissance de l'énergie cinétique ( et donc le taux de croissance de la perturbation) a la même tendance que celle du taux de croissance de la production axiale. Cela signifie que cette dernière a l'influence majeure sur le bilan de l'énergie cinétique. nous remarquons aussi que le taux de croissance du terme d'échange est assez faible et il varie très peu en fonction du nombre de Richardson.

Les valeurs données dans le tableau (5.2) pour quelques nombres de  $Ri$  nous montrent l'ordre de grandeur de chaque taux de croissance. Nous remarquons par exemple que le taux de croissance du terme d'échange est de l'ordre de  $10^{-4}$  et il augmente très faiblement avec l'augmentation du nombre de  $Ri$ . Aussi la variation du taux de croissance de la dissipation est très faible avec la variation de  $Ri$ .

TABLE 5.2 – Valeurs des taux de croissances des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente.

Ri	$\sigma_{axial_{TKE}}$	$\sigma_{cross-roll_{TKE}}$	$\sigma_{dissip_{TKE}}$	$\sigma_{exchange_{TKE}}$	$\sigma_{2_{TKE}}$
0	$0.58 \cdot 10^{-1}$	$0.95 \cdot 10^{-2}$	$0.467 \cdot 10^{-1}$	0	0.0211
$0.5 \cdot 10^{-3}$	$0.55 \cdot 10^{-1}$	$0.93 \cdot 10^{-2}$	$0.463 \cdot 10^{-1}$	$0.93 \cdot 10^{-4}$	0.0181
$10^{-3}$	$0.52 \cdot 10^{-1}$	$0.89 \cdot 10^{-2}$	$0.459 \cdot 10^{-1}$	$1.65 \cdot 10^{-4}$	0.0157
$1.5 \cdot 10^{-3}$	$0.50 \cdot 10^{-1}$	$0.84 \cdot 10^{-2}$	$0.455 \cdot 10^{-1}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$	0.0126
$1.8 \cdot 10^{-3}$	$0.48 \cdot 10^{-1}$	$0.80 \cdot 10^{-2}$	$0.454 \cdot 10^{-1}$	$2.26 \cdot 10^{-4}$	0.0111
$2 \cdot 10^{-3}$	$0.47 \cdot 10^{-1}$	$0.77 \cdot 10^{-2}$	$0.452 \cdot 10^{-1}$	$2.30 \cdot 10^{-4}$	0.0098

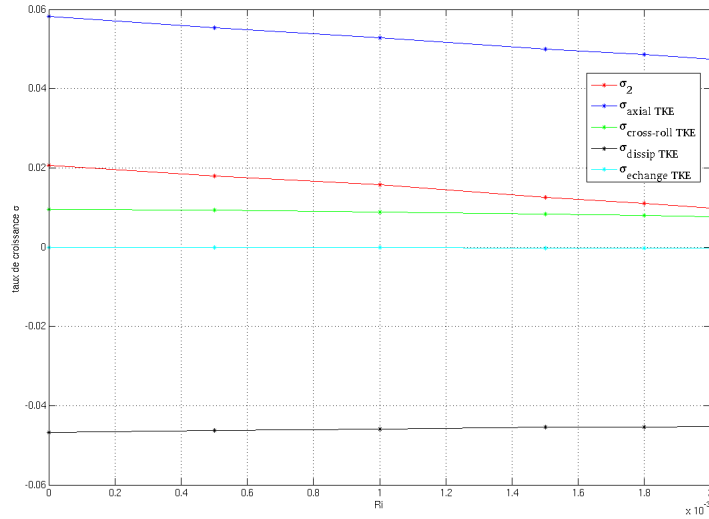


FIGURE 5.6 – Variation des taux de croissance des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente en fonction du nombre de Richardson.

## 5.2.2 Etude de l'énergie potentielle

Une étude similaire à celle de l'énergie cinétique turbulente peut être faite pour l'énergie potentielle. La  $E_{TPE}$  est proportionnelle au carré de la flottabilité.

La  $E_{TPE}$  vérifie l'équation (5.5).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{b_{3D}^2}{2} \right) = u_{3D} \cdot b_{3D} \cdot \frac{\partial b_{2D}}{\partial x} + b_{3D} \cdot w_{3D} \cdot \frac{\partial b_{2D}}{\partial z} + \sqrt{Ri} w_{3D} b_{3D} - \frac{1}{Re \cdot Pr} b_{3D} \Delta b_{3D} \quad (5.5)$$

La variation de l'énergie potentielle dans le temps peut donc être décomposée respectivement suivant la relation (5.6).

$$\frac{\partial E_{TPE}}{\partial t} = \begin{matrix} P_{TPE} \\ +X_{ech} \\ -D_{TPE} \end{matrix} \quad (5.6)$$

$P_{TPE}$  représente les termes de production de l'énergie potentielle,  $D_{TKE}$  représente les termes de dissipation de l'énergie potentielle et  $X_{ech}$  représente les termes d'échanges entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Une représentation spatiale des différents termes du bilan est donnée dans la figure (5.7).

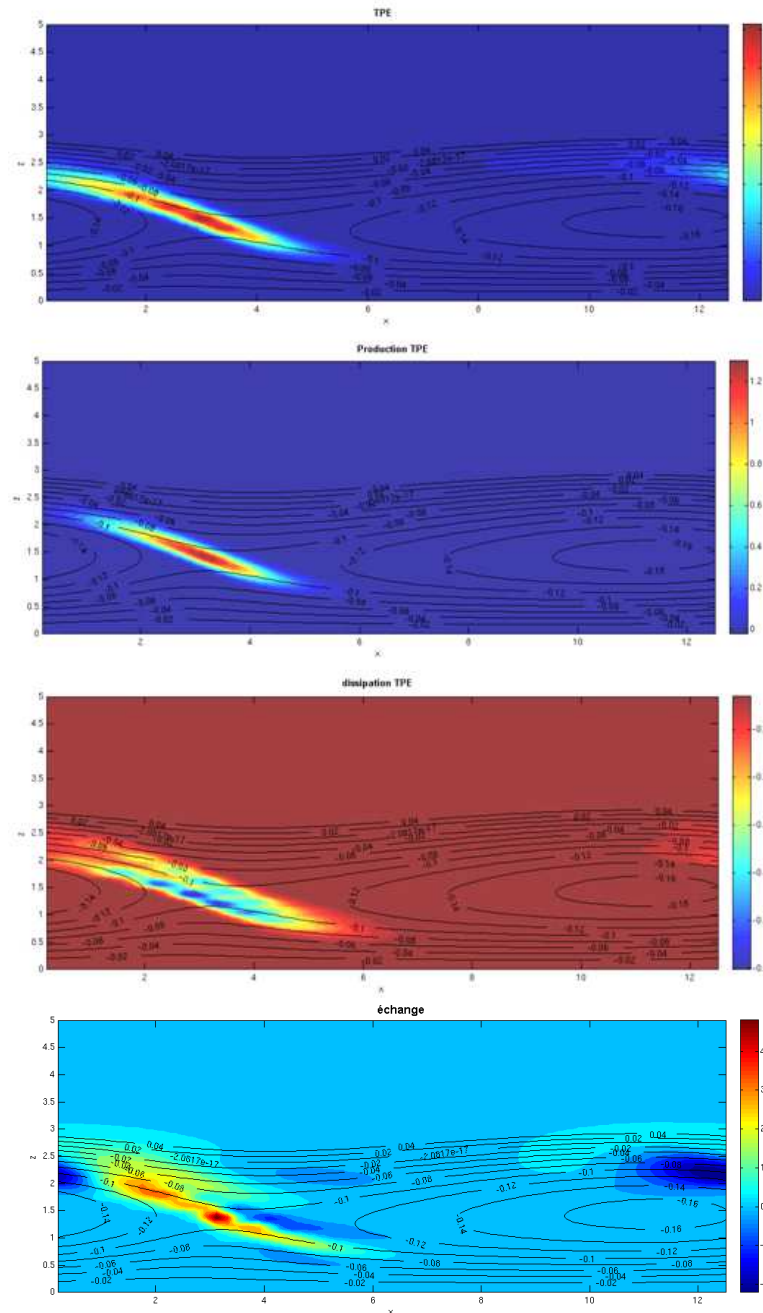


FIGURE 5.7 – Termes du bilan d'énergie potyentielle : la  $E_{TPE}$ , le terme de production, de dissipation et d'échange en couleur et les lignes de courant en noir .

La figure (5.8) représente le taux de croissance de chaque terme du bilan en fonction du nombre de Richardson pour  $Re = 500$  et  $Pr = 1$ .

Les taux décroissance sont définies tel que :  $\sigma_{prod_{TPE}} = \frac{P_{TPE}}{E_{TPE}}$ ;  $\sigma_{dissip_{TPE}} = \frac{D_{TPE}}{E_{TPE}}$  et  $\sigma_{exchange_{TKE}} = \frac{X_{ech}}{E_{TPE}}$ .

Dans ce cas la relation entre les taux de croissance est  $\sigma_{2_{TPE}} = \sigma_{prod_{TPE}} - \sigma_{dissip_{TPE}} + \sigma_{echange_{TPE}}$ . Avec  $\sigma_{2_{TPE}} = \sigma_2$  est le taux de croissance de la perturbation 3D, et les autres taux de croissance sont respectivement le taux de croissance des termes de production, de dissipation et d'échange.

Nous donnons dans le tableau (5.3) les valeurs des taux de croissance pour certains nombres de Ri. Nous remarquons par exemple que le taux de croissance du terme de production varie plus considérablement en le comparant avec la variation du taux de croissance des termes de dissipation ou d'échange.

TABLE 5.3 – Valeurs des taux de croissance des termes du bilan d'énergie potentielle.

Ri	$\sigma_{prod_{TPE}}$	$\sigma_{dissip_{TPE}}$	$\sigma_{echange_{TPE}}$	$\sigma_{2_{TPE}}$
$0.5 \cdot 10^{-3}$	0.044	0.0400	0.0138	0.0181
$10^{-3}$	0.043	0.0395	0.0121	0.0157
$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.041	0.0388	0.0101	0.0126
$1.8 \cdot 10^{-3}$	0.040	0.0384	0.0092	0.0111
$2 \cdot 10^{-3}$	0.039	0.0382	0.0084	0.0098

La représentation graphique de ces différents taux de croissance (figure (5.8)) nous montre que la pente de variation du taux de croissance  $\sigma_{2_{TPE}}$  est la même que celle que  $\sigma_{prod_{TPE}}$  ce qui montre que le terme de production de l'énergie potentielle est le terme prépondérant dans le bilan.

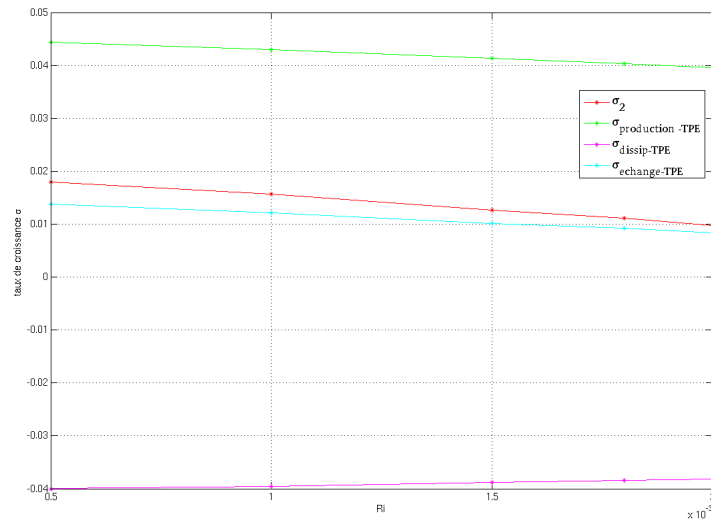


FIGURE 5.8 – Variation des taux de croissance des termes du bilan d'énergie cinétique turbulente en fonction du nombre de Richardson,  $Re=500$ ,  $Pr=1$ .

# Chapitre 6

## conclusions

L'objectif principal de ce stage était l'étude de l'instabilité linéaire secondaire dans le cas de la couche d'Ekman stratifiée. Pour atteindre cet objectif nous avons suivi plusieurs étapes. Il nous a tout d'abord fallu nous initier aux principaux traits caractérisant le modèle en se basant sur la définition des équations ainsi qu'aux différents paramètres utilisés et qui sont le nombre de Reynolds, le nombre de Richardson et le nombre de Prandtl.

Dans la suite, nous avons étudié l'instabilité linéaire primaire comme étant un résultat de l'ajout d'une petite perturbation bidimensionnelle. Nous avons alors déterminé les différents taux de croissance et modes propres appropriés.

Le chapitre suivant nous montre l'effet de la stratification sur l'écoulement total après l'évolution de la perturbation 2D. Les rouleaux formés saturent et trouvent un aspect non linéaire. Ces derniers se déplacent avec une vitesse de phase constante. Une étude énergétique ainsi qu'une étude de la stabilité statique représentée par son taux de croissance  $\sigma_{stat}$  nous a permis de voir l'importance de l'effet de la stratification thermique sur les rouleaux saturés.

Nous avons étudié alors dans le chapitre suivant l'instabilité linéaire secondaire en ajoutant une perturbation tridimensionnelle infinitésimale aux rouleaux. Nous avons pu trouver les taux de croissance et les modes propres correspondants. Nous avons aussi fait une étude énergétique comportant l'étude de l'énergie cinétique turbulente et l'étude de l'énergie potentielle pour pouvoir observer séparément l'effet de chaque terme.

Durant ce travail nous avons fortement joué sur la variation des différents paramètres du système tel que le nombre de Richardson et le nombre de Reynolds. L'étude de l'effet de la variation du nombre de Prandtl est restée inachevée, cette étude est importante pour avoir une étude exhaustive sur l'effet de tout les paramètres.

Ces quelques mois de stage au sein de l'équipe du Laboratoire de Météorologie Dynamique m'ont apporté de nombreuses certitudes, tant d'un point de vue scientifique que personnel. En effet, j'ai pu approfondir mes connaissances en modélisation numérique, en étude de la turbulence et de la couche limite atmosphérique mais aussi je me suis bien intégrée dans le domaine de la recherche.



# Bibliographie

- R. A. Brown. A secondary flow model for the planetary boundary layer. *JAS*, 27 :742–757, 1970.
- R. A. Brown. On the inflection point instability of a stratified ekman boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29(5) :850–859, July 1972. doi : 10.1175/1520-0469(1972)029%3C0850:OTIPIO%3E2.0.CO;2. URL [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469\(1972\)029%3C0850:OTIPIO%3E2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1972)029%3C0850:OTIPIO%3E2.0.CO;2).
- T. Dubos, C. Barthlott, and P. Drobinski. Emergence and secondary instability of ekman layer rolls. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(7) :2326–2342, July 2008. doi : 10.1175/2007JAS2550.1. URL <http://dx.doi.org/10.1175/2007JAS2550.1>.
- R. C. Foster. Why rolls are prevalent in the hurricane boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 62(8) :2647–2661, 2005.
- J. C. King, A. Jrrar, and W. M. Connolley. Sensitivity of modelled atmospheric circulation to the representation of stable boundary layer processes. *Geophysical Research Letters*, 34(6) :L06708+, March 2007. ISSN 0094-8276. doi : 10.1029/2006GL028563. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2006GL028563>.
- D. K. Lilly. On the instability of Ekman boundary flow. *J. Atmos. Sci.*, 23(481-494), 1966a.
- D. K. Lilly. On the instability of Ekman boundary flow. *J. Atmos. Sci.*, 23(481-494), 1966b.
- Roland B. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- George S. Young, David A. Kristovich, Mark R. Hjelmfelt, and Ralph C. Foster. Rolls, streets, waves, and more : A review of quasi-two-dimensional structures in the atmospheric boundary layer. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 83(7) :997–1001, July 2002. doi : 10.1175/1520-0477(2002)083%3C0997:RSWAMA%3E2.3.CO;2. URL [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477\(2002\)083%3C0997:RSWAMA%3E2.3.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0477(2002)083%3C0997:RSWAMA%3E2.3.CO;2).

# Annexe A

## Implantation et choix numériques

La grille de ce modèle est une grille de 64 points selon x et 4 points selon y. le pas de la grille  $d$  est tel que  $d=L/Nbre$  où  $L$  est la taille du domaine et  $Nbre$  est le nombre de points dans la grille.

Les simulations numériques sont ainsi pilotées par des modèles basés sur des décompositions (différences finies, éléments finis, méthodes spectrales) où les fonctions diagnostiques (champ de vitesse ou de vorticité, fonction de courant, etc ...) sont obtenues dans une grille spatiale fixe.

On présente la méthode des éléments finis comme une méthode pour résoudre des problèmes de physique ou plus généralement des équations différentielles avec conditions aux limites. La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une équation aux dérivées partielles dont on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

Durant ce travail nous allons utiliser cette décomposition numérique pour les fonctions de base ( $\mathbf{U}_{propres}$ ) qui décrivent les perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles de telle sorte que  $\mathbf{U}_{2,3D_{propres}} = \sum_m a_m(t) \cdot \mathbf{U}_m(z)$ ,

les  $a_m$  sont des coefficients dépendants du temps., les  $\mathbf{U}_m$  sont des B-spline (une combinaison linéaire de fonctions définies par polynômes (splines)) de degré 3 et qui vérifient  $div\mathbf{U}_m = 0$ .

Durant nos simulations, il a fallu bien choisir les paramètres du modèle pour avoir la stabilité numérique. En effet, le choix de la taille de la maille et du pas du temps dans un schéma numérique est un compromis entre la précision que nous voudrions atteindre et les capacités informatiques dont nous pouvons disposer pour les calculs. Dans notre cas, au début nous avons travaillé avec un nombre de Reynolds égal à 1000, nous nous trouvons dans un milieu turbulent stratifié pour des valeurs du nombre de Richardson un peu plus élevés.

En prenant  $Re=1000$ , la viscosité diminue, l'instabilité augmente et donc on aura des taux de croissance plus petits par rapport à ceux trouvés pour  $Re=500$ . Mais pour un nombre de Reynolds assez élevé ( $Re=1000$ ) nous avons eu des problèmes de résolution notamment pour l'instabilité linéaire secondaire, c'est pour cette raison que nous nous sommes limités à  $Re=500$ .

# Annexe B

## Méthode numérique

Le domaine est périodique selon  $x$  et  $y$ , de taille  $L_x$  et  $L_y$  respectivement. Le changement de variable  $\eta = 1 - e^{-z/z_0}$  où  $z_0 = 3.1$  l'axe  $z$  semi-infini en un axe  $\eta$  fini :  $\eta \in [0, 1[$ . La discrétisation spatiale est basée la méthode de Galerkin et sur une décomposition des champs de vitesse et de flottabilité comme combinaison linéaire de fonctions de base de type modes de Fourier dans les direction  $x$  et  $y$  et éléments finis dans la direction  $z$  [Dubos et al., 2008].

### Flottabilité

La flottabilité est décomposée selon :

$$b(x, y, z, t) = \sum_{k=-M_x}^{M_x} \sum_{l=-M_y}^{M_y} \sum_{m=0}^{M_z} \tilde{b}_{klm}(t) \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) B_m(\eta) + c.c \quad (\text{B.1})$$

où les coefficients  $\tilde{b}_{klm}(t)$  sont complexes. L'intervalle  $[0, 1]$  est divisé en  $N_z$  intervalles égaux, ce qui fixe la résolution verticale. Les fonctions  $B_m$  sont des B-splines de degré  $d = 3$  (polynômes par morceaux de classe  $C^{d-1}$ ) sur cette subdivision de  $[0, 1]$ ; il existe  $M_z + 1 = N_z + d$  fonctions  $B_m$ . La résolution horizontale est quant à elle déterminée par les nombres  $M_x, M_y$  qui fixent la troncature spectrale. Les conditions aux limites  $b(\eta = 0, 1) = 0$  imposent simplement la nullité des coefficients  $\tilde{b}_{klm}$  pour  $m = 0$  et  $m = M_z$ .

Le champ de flottabilité est donc entièrement décrit par la donnée des coefficients complexes  $\tilde{b}_{klm}$ . Inversement si  $b^{exact}$  est donné, ils n'est pas en général pas exactement de la forme (B.1). On cherche alors les coefficients  $\tilde{b}_{klm}$  qui minimisent  $b_{exact} - b$  au sens des moindres carrés. Pour cela on définit le produits scalaire :

$$(b, b') = \frac{1}{L_x L_y} \int b^* b' dx dy dz.$$

et on demande :

$$\forall k, l, m \quad \left( \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) B_m(\eta), b \right) = \left( \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) B_m(\eta), b^{exact} \right),$$

ce qui équivaut à :

$$\forall k, l, m \quad \sum_{m'} (B_m(\eta), B_{m'}(\eta)) \tilde{b}_{klm'} = (B_m(\eta), \tilde{b}_{kl}^{exact})$$

où les  $\tilde{b}_{kl}^{exact}$  sont les coefficients de Fourier de  $b^{exact}$  :

$$\tilde{b}_{kl}^{exact}(z) = \frac{1}{L_x L_y} \int \exp -i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) b^{exact} dx dy.$$

On est donc conduit, après avoir calculé  $\tilde{b}_{kl}^{exact}(z)$  par transformée de Fourier rapide, puis  $\int B_m(\eta) \tilde{b}_{kl}^{exact} dz$  par quadrature de Gauss-Legendre, à résoudre, indépendamment pour chaque mode de Fourier  $(k, l)$  un système linéaire d'inconnues  $\tilde{b}_{klm}$ . La matrice qui intervient dans ce système linéaire est la matrice de masse

$$M_{mm'}^b = \sum_{m'} (B_m(\eta), B_{m'}(\eta)).$$

$M^b$  est symétrique définie positive et a une structure en bande, ce qui permet la résolution directe et rapide des systèmes linéaires. La matrice de masse permet également de calculer directement l'énergie potentielle à partir des coefficients spectraux  $\tilde{b}_{klm}$ .

## Vitesse

Le champ de vitesse est décrit par sa décomposition poloidale-toroidale, ce qui garantit  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = U(z, t)\mathbf{e}_x + V(z, t)\mathbf{e}_y + \nabla \times (\alpha(x, y, z, t)\mathbf{e}_z + \nabla \times (\beta(x, y, z, t)\mathbf{e}_z))$$

où les profils moyens instantanés  $U(z, t)$  et  $V(z, t)$  ainsi que les potentiels  $\alpha$  et  $\beta$  sont décomposés de façon analogue à  $b$ . Cette double décomposition conduit à la représentation :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{M_z} (U_m(t)B_m(\eta)\mathbf{e}_x + V_m(t)B_m(\eta)\mathbf{e}_y) \\ &+ \sum_{k=-M_x}^{M_x} \sum_{l=-M_y}^{M_y} \sum_{m=0}^{M_z} \tilde{\alpha}_{klm}(t) \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) \mathbf{u}_{klm}^{toro}(\eta) + c.c \\ &+ \sum_{k=-M_x}^{M_x} \sum_{l=-M_y}^{M_y} \sum_{m=0}^{M_z} \tilde{\beta}_{klm}(t) \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) \mathbf{u}_{klm}^{polo}(\eta) + c.c \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où

$$\begin{aligned} \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) \mathbf{u}_{klm}^{toro}(\eta) &= \nabla \times \left( \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) B_m(\eta)\mathbf{e}_z \right) \\ \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) \mathbf{u}_{klm}^{polo}(\eta) &= \nabla \times \nabla \times \left( \exp i \left( \frac{kx}{2\pi L_x} + \frac{ly}{2\pi L_y} \right) B_m(\eta)\mathbf{e}_z \right). \end{aligned}$$

Les conditions aux limites  $\mathbf{u}(\eta = 0, 1) = 0$  se traduisent par

$$\alpha(\eta = 0, 1) = 0 \quad \beta(\eta = 0, 1) = 0 \quad \partial_z \beta(\eta = 0) = 0$$

et s'expriment simplement en annulant les coefficients  $\tilde{\alpha}_{klm}$  (resp.  $\tilde{\beta}_{klm}$ ) pour  $m = 0, M_z$  (resp.  $m = 0, 1, M_z$ ).

De même la détermination des coefficients  $\tilde{\alpha}_{klm}$ ,  $\tilde{\beta}_{klm}$  en fonction d'un champ donné  $\mathbf{u}^{exact}$  se fait en résolvant indépendamment pour chaque mode de Fourier  $(k, l)$  deux systèmes linéaires faisant intervenir la transformée de Fourier de  $\mathbf{u}^{exact}$  et les matrices de masse :

$$M_{kl; mm'}^{toro} = \sum_{m'} (\mathbf{u}_{klm}^{toro}(\eta), \mathbf{u}_{klm'}^{toro}(\eta)) \quad M_{kl; mm'}^{polo} = \sum_{m'} (\mathbf{u}_{klm}^{polo}(\eta), \mathbf{u}_{klm'}^{polo}(\eta)).$$

## Schéma temporel

Les étapes élémentaires d'un pas de temps explicite sont donc finalement :

1. calcul des valeurs de  $b$  et  $\mathbf{u}$  aux points de grille par application des décompositions (B.1) et (B.2) et transformée de Fourier rapide,
2. calcul aux points de grille des termes des équations de Boussinesq puis de  $b(t + \delta t)$  et  $\mathbf{u}(t + \delta t)$ ,
3. transformée de Fourier rapide de  $b(t + \delta t)$  et  $\mathbf{u}(t + \delta t)$ ,
4. détermination de  $\tilde{b}_{klm}(t + \delta t)$ ,  $\tilde{\alpha}_{klm}(t + \delta t)$  et  $\tilde{\beta}_{klm}(t + \delta t)$  par inversion des matrices de masse.

La discrétisation temporelle est un schéma de Runge-Kutta semi-implicite d'ordre 3. Dans ce type de schéma les termes visqueux et diffusifs sont traités implicitement par une modification de l'étape 4. La stabilité du schéma ne dépend alors plus que des termes non-visqueux, qui sont traités de façon explicite selon les étapes 1 à 3. La non-divergence des fonctions de base pour la vitesse fait que le gradient de pression n'a aucune influence. La pression et son gradient ne sont donc jamais calculés.

La grille de calcul de l'étape 2 a  $N_x \times N_y \times qN_z$  points où  $N_x > 3M_x$ ,  $N_y > 3M_y$  et  $q$  est le nombre de points de quadrature de Gauss-Legendre dans chacun des  $N_z$  sous-intervalles de  $[0, 1]$ . Le nombre  $q$  est choisi suffisamment grand pour que le calcul des produits scalaires par quadrature soit exact. Il en résulte que les termes non-visqueux discrétisés conservent exactement l'énergie cinétique et potentielle, et donc que les bilans d'énergie sont exactement fermés.